Hermann Cohens

Philosophie der Mathematik.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

vorgelegt

von

Rudolf Odebrecht
aus Berlin.

ACAD. LIBRARY BERL.

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Juli 1906.

Berlin 1906.
Universitäts-Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke)
Linienstraße 158.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542702_0091

Inhalt.

Seite

Vorwort 5

I. Historischer Teil.

Allgemeiner Standpunkt Cohens 10

II. Teil. Cohens System.

A. Die Grundlegung.

§ 1. Kritische Untersuchung der Methoden zur Gewinnung eines letzten Grundes 23

§ 2. Die Gewinnung eines Ursprungs des Endlichen im Unendlichkleinen 25

§ 3. § 4. § 5. Fortsetzung und Ausführung 27, 29, 31

§ 6. Raum und Geometrie 38

§ 7. Zusammenfassung 40

B. Anwendung der Mathematik.

§ 1. Mathematische Naturwissenschaft 41

§ 2. Psychologie 44

Kritisches Nachwort.

Einführung: Staudinger kontra Cohen 46

§ 1. Das Irrationale, der Stein des Anstoßes, in Cohens System . . . 50

§ 2. Die Definitionen des Irrationalen 51

§ 3. Die Erklärung des Irrationalen mit Hinweis auf Cohens System . 53

Literaturverzeichnis 58

Vorwort.

Bei der umfassenden, in jede systematische wissenschaftliche Forschung tief eingreifenden Bedeutung, welche die Zahlen durch den in ihrem Wesen begründeten rätselhaften apodiktischen Charakter besitzen, nimmt es nicht wunder, wenn frühzeitig Zahlenlehre und Mathematik überhaupt auf die Philosophie einen großen Einfluß gewannen, und wenn andererseits die Philosophie das Wesen mathematischer Erkenntnisse zu bestimmen suchte.

Hier ist es natürlich, daß die Verhältnisse, welche sich jedesmal ergeben, wenn eine philosophische Denker-Gruppe von bestimmter Individualität dieses Thema in ihren Betrachtungskreis zieht, recht mannigfaltige sein können. So entspricht es einer Zeitepoche, in welcher das Anschauliche in der Mathematik, das Geometrische, die Hauptbasis dieser Disziplin ausmachte, in welcher die Arithmetik stets nur in einem gedachten Verhältnis zu Dingen gepflegt wurde, und die abstrahierende, jedes Konkrete ein für alle Male ausschließende Analysis noch in den Kinderschuhen steckte, wenn man in einer Hypostasierung der Zahlen das Wesen der Wirklichkeit sah.

Von der Eleganz und Sicherheit zahlenmäßiger Belege geblendet, indessen unfähig, sich zu einer von jeder Materialität losgelösten Betrachtungsweise ihrer Lieblingswissenschaft zu erheben, erblickten die Pytagoreer bald in der Zahl das „Prinzip alles Seienden"; „entzückt von der Natur der Zahlen und von der apodiktischen Erkenntnis der den Dingen innewohnenden mathematischen Ordnung überspannten sie die Kraft des mathematischen Prinzips in ihrer die exakte mathematische Wissenschaft überschreitenden Zahlenspekulation und sahen die quantitativen Verhältnisse als das eigentliche Konstituierende der Dinge an"[1]).

[1]) Vergl. Überweg-Heinze, 9. Auflage, Bd. 1, pag. 68 f.

Statt sich mit der Konstatierung gewisser harmonischer Verhältnisse in der Welt zufrieden zu geben, ließen diese Philosophen in ihrem unkritischen Freudentaumel über die durch ihre Zahlen scheinbar vollzogene Enträtselung der Natur das System zu einem Wirrwarr unmethodischer, mitunter orphisch-mystischer Phantastereien aufschwellen. Das Bestreben, die Wirklichkeit in einem Spiel von Zahlen auszudrücken, das zwar in den Anfängen auf richtiger wissenschaftlicher Beobachtung beruhte, endete doch schließlich in einem unwissenschaftlichen Spielen mit Zahlen.

Ihre Zahlenmystik dehnten sie auf die Erscheinungswelt gleicherweise wie auf ethische und psychische Gebiete aus[2]). So wurden die Elemente: Feuer, Erde, Luft, Wasser und der himmlische Äther mit den fünf einfachen stereometrischen Gebilden in Beziehung gebracht, das Gerade und Ungerade in Parallele zum Vollkommenen und Unvollkommenen, zum Guten und Schlechten und der heiligen Dekas zuliebe Gegensatzpaare in der Zehnzahl aufgestellt. Derartige Grübeleien bilden, wie milde sie auch beurteilt werden, und wie sehr wir auch ihr aufrichtiges Streben nach Klassifizierung anerkennen mögen, im Grunde doch ein bedeutungsloses, krampfhaftes Zusammenschweißen der heterogensten Dinge zugunsten einer Lieblingsidee.

Noch auf andere Weise konnte man dem Bestreben, Philosophie und Mathematik zu verschwistern, zu Hilfe kommen; indem man nämlich die Methode der letzteren unkritisch unmittelbar auf die Philosophie und Welterkenntnis anwandte, d. h. den Versuch machte, das Verfahren, welches in der Mathematik zu so bedeutenden Ergebnissen geführt hatte, auch unmittelbar äußerlich in der Philosophie nachzuahmen. Nach dieser Richtung hat die cartesianische Philosophie gewirkt, obwohl Cartesius selbst nicht in diesen Fehler gefallen ist und nur den hohen Wert der Mathematik, die er ja auch innerlich bereichert hatte, anerkannte. Indem man sich an Euklid hielt, der das ganze Gebäude der Geometrie mit Hilfe reiner Gedankentätigkeit aus wenigen Axiomen errichtet hatte, versprach man sich viel von dem Gedanken, in analoger Weise mit philosophischen Problemen nach Hypostasierung eines ersten Ur-

---

[2]) Windelband, Lehrbuch der Gesch. der Philos., II. Auflage, pag. 36 ff.

grundes zu verfahren, und „der monistische Zug der cartesianischen Methodologie[3]), ihre Aufstellung eines höchsten Prinzips, aus dem alle andere Gewißheit folgen sollte, begünstigte diese Verwechselung“. Bekanntlich finden wir diese Anschauung von Spinoza auf die Spitze getrieben. Die Zwangsjacke, die er more geometrico der cartesianischen Philosophie sowohl wie seiner eignen halb mystisch, halb rationalistisch durchwehten Lehre anlegt, findet zwar auch hier ihre Erklärung in der durchaus religiösen Grundstimmung seines Charakters, dem die Gottesanschauung als ein apriorischer „allein unmittelbar gewisser Inhalt des Denkens“ galt; indes führt die konsequente Durchführung dieser mathematischen Voraussetzungen[4]) und Folgen zu Schwierigkeiten, wie sie am eklatantesten der Parallelismus der Attribute, der Satz: „ordo rerum idem est atque ordo idearum“ in seiner weiteren Ausbeutung zeigt[5]). Dieses Verfahren, wobei die Mathematik zu außer ihrem Bereich liegenden Hilfeleistungen herangezogen wird, kann man füglich das unwissenschaftliche nennen. Dagegen erheben sich für eine Philosophie der Mathematik zwei wichtige Fragen, nämlich:

I. Die Frage nach der Begründung der Mathematik, welche zuerst von Platon angeschnitten wurde, der in der Mathematik nach den Hypotheses gefragt hat und den letzten unbedingten Grund suchte.

Derartige Untersuchungen würden also zu fragen haben nach dem Wesen der mathematischen Begriffe und Erkenntnisse, nach ihren Voraussetzungen und deren Begründung, nach der mathematischen Erkenntnisbildung, der Methode. Mit der Beantwortung dieser Frage ist im wesentlichen auch ein Weiteres gegeben, nämlich:

II. Die Frage nach den Grenzen der Anwendung der Mathematik, ihrer Bedeutung im System der Wissenschaften und für die Philosophie.

---

[3]) Windelband, Lehrbuch der Gesch. der Philos., § 30, Abs. 6, S. 323—325.

[4]) Windelband, Gesch. der neueren Philos., pag. 210—213.

[5]) Die blinde Vorliebe für die Mathematik führte auch zur Verwechselung von logischem und Realgrund in Spinozas Philosophie; „statt von der Mathematik zu lernen, hat sie sich von ihr tyrannisieren lassen“. Falckenberg, Gesch. der neueren Philos., Leipzig 1905, S. 111.

Diese beiden Fragen lassen sich auch folgendermaßen formulieren:

I. Die Frage nach den philosophischen Voraussetzungen der Mathematik und

II. Die Frage nach den philosophischen Konsequenzen, die sich aus der Einsicht in das Wesen der Mathematik ergeben.

Von niemandem sind in der Gegenwart diese Fragen so eingehend erörtert worden wie von Prof. Hermann Cohen in Marburg. Für diesen spielt die Mathematik in der philosophischen Besinnung geradezu die wesentliche Rolle.

Fragen zwar, wie die nach dem Begriffe des Unendlichen, nach dem Wesen von Raum und Zeit, nach der Natur mathematischer Urteile, ob sie synthetische oder analytische, ob sie Urteile a priori oder aus der Erfahrung sind, etc. etc. haben ja auch sonst in der Gegenwart die Köpfe der Denker beschäftigt, was nicht verwunderlich ist, da die Philosophie Kants noch gegenwärtig im Vordergrund des Interesses steht. Aber keiner hat diese Fragen so allseitig erwogen und so tief erfaßt wie Cohen.

Gerade deshalb wohl ist es ihm auch gelungen, die Auffassung der Lehren der Philosophen, die sich vor ihm mit der Philosophie der Mathematik befaßt haben, wesentlich zu vertiefen, mag ihm vielleicht auch hier und da der philologische Historiker vorwerfen, daß er in den Lehren seiner Vorgänger zuviel gesehen hat. Jedenfalls bildet seine Interpretation dieser Philosophen selbst wieder eine originale Leistung, die bei der Darstellung seiner Philosophie der Mathematik nicht übergangen werden darf.

Daher gliedert sich die Arbeit in folgende zwei Teile. Es wird zu untersuchen sein, was Cohen als die Voraussetzung der Mathematik hinstellt; was er zu ihrer Begründung anführt, und welche Konsequenzen er daraus entwickelt. Hierbei wird zu berücksichtigen sein, was die mit Cohen konkurrierenden Begründungen, die mathematische mit Hilfe der „Grenzen“, die psychologisch-empirische mit der Entstehungsgeschichte der Mathematik, leisten. Dieses wird den zweiten Teil bilden. Ihr wird als erster Teil die Darstellung des Wichtigsten, was Cohen zu einer Geschichte der Philosophie der Mathematik beigetragen hat, vorangehen müssen.

Das versteht sich von selbst, daß bei der Arbeit nicht ängstlich nur auf die einzelnen Worte Cohens wird geachtet werden dürfen; auch was unter seinem direkten Einfluß von seinen Schülern und Anhängern geleistet wird, darf angeführt werden.

Es versteht sich nicht so sehr von selbst, ist aber durch die Ökonomie der Arbeit bedingt, daß in der Darstellung seiner Erkenntnistheorie nur das für uns Wichtigste erwähnt wird, so sehr sie auch mit unserem Problem verschwistert ist.

I. Historischer Teil.

Allgemeiner Standpunkt Cohens.

Für die Einsicht in Cohens Philosophie der Mathematik[1]) und für seine Wertung und Beurteilung in der Geschichte ist es notwendig, sich erst ein ungefähres Bild von seiner Stellung zur Philosophie und den verschiedenen philosophischen Richtungen zu machen. Diese ist zunächst darin zu suchen, daß er einer der Hauptdenker war, der beim Rückgang auf Kant die neukantische Philosophie und das Studium von Kants Werken förderte.

Diese Erneuerung der Kant-Philosophie geschah nach einer großen Mannigfaltigkeit von Richtungen[2]).

Hat hier Cohen das Verdienst, in eingehenden Darstellungen die Philosophie Kants bearbeitet zu haben, wozu besonders seine drei umfangreichen Werke: Kants Theorie der Erfahrung, der Ethik und der Ästhetik, dienen, so ist seine Auffassung und Weiterbildung der kantischen Lehre vor allem durch folgende Momente im einzelnen bestimmt. Zunächst betont er die Bedeutung der Mathematik und mathematischen Natur-

[1]) Dieser Ausdruck könnte bei der Cohenschen Auffassung von Philosophie und Mathematik (Cohen, S. XXII im Vorwort zu F. A. Langes Geschichte des Materialismus) zu Zweideutigkeiten führen, zumal die Mathematik zu ihrer inneren Entwickelung keiner philosophischen Krücken bedarf, da sie sich selbst genug ist. Wir müßten streng genommen von der philosophischen Deutung der Mathematik hinsichtlich ihrer Eigenschaft als Methode der Naturwissenschaft sprechen und möchten dieses unter der obigen präzisen Zusammenstellung verstanden wissen.

[2]) Eine gute Übersicht über die Mannigfaltigkeit der von Kant sich herschreibenden Richtungen der Gegenwart hat Falckenberg in seiner „Gedächtnisrede auf Kant zur Feier der hundertjährigen Wiederkehr des Philosophen“ usw. Erlangen 1904 gehalten. Eine Inhaltsangabe dieser Rede findet sich in den Kant-Studien, Jahrg. 1904, im Artikel von H. Renner, pag. 531—532.

wissenschaft für die Möglichkeit der Gewinnung des Begriffs der reinen Erkenntnis[3]).

Was ist ihm aber Erkenntnis? Nicht das Erkenntnisvermögen schlechthin kommt in Frage; überlassen wir das der Psychologie. Der philosophische Kritizismus hat sich lediglich mit wissenschaftlicher Erkenntnis zu befassen, mit der Untersuchung, wie sich das Erkenntnisvermögen in den exakten Wissenschaften betätigt. Hieraus geht auch hervor, wie weit er die Berufung auf Erfahrung, die er als Transzendental-Philosoph fordert, verstanden wissen will. Ihn interessiert nicht die Erfahrung, wie sie das Werkzeug des Naturforschers ist, denn er will nicht Dinge erzeugen, sondern die ihm überkommenen Resultate, wie sie als Objekte und Gesetze der mathematischen Erfahrung erscheinen, nachprüfen[4]). Des Philosophen Macht-Rayon ist das Bibliothekszimmer; er warnt vor jeder Einmischung in die Rechte der gesetzgeberischen Wissenschaft. Dies indeß mit einer kleinen Einschränkung, da er auch für „die erzeugende Mitwirkung der Metaphysik" um ein Stühlchen bittet[5]). Hiermit kommt Cohens eigner Idealismus zum Durchbruch, der ihm jedoch in allzu großen Dosen zuwider ist.

Wir wollen alle diese Punkte etwas näher betrachten.

Die Sätze und Schlüsse der Mathematik, die mit phänomenaler Nötigung jedem vernünftig kritisierenden Denker ein schließliches Kopfnicken abringen, ohne doch die Gründe[6]) dieser rätselhaften Überzeugungskraft erkennen zu lassen, fordern seit Jahrtausenden den Scharfsinn der besten Köpfe zur Untersuchung heraus.

Die Mathematik ist die Wissenschaft der Überraschungen, sie arbeitet mit den einfachsten Werkzeugen und schafft Unermeßliches; ihre Autorität liegt in der grandiosen Unbekümmertheit um den störenden Gedanken einer ev. Existenz ihrer Dreiecke, Kreise usw. in der Natur.

Daß die Resultate des mathematischen Denkens keine vagen Ungeheuerlichkeiten sind, dafür hat ja die fundamen-

[3]) Vergl. F. Lindheimer in: Berner Studien zur Philosophie und ihrer Gesch., Bd. XXI, S. 10—14.

[4]) Cohen, Kants Theorie d. Erf., S. 578.

[5]) S. 580.

[6]) Hierzu: Lindheimer, S. 14—16.

tierende Abstraktion der Prinzipien gesorgt, dafür sorgt die leitende und bestimmende, keinen Zweifel duldende Macht des Bewußtseins. Und so soll uns denn, meint Cohen, die Mathematik fürderhin eine Lehrmeisterin sein, wie wir allgemein gültige Urteile auch in anderen Wissensgebieten machen sollen: als Objekt und Hauptaufgabe der Philosophie bestimmt er somit das Problem der Gewißheit, aber nicht auf Dinge, vielmehr auf Erkenntnisse erstreckt sich diese Gewißheit, und zu diesem Zwecke haben wir nach einer geeigneten Methode zu suchen, die den eben ausgesprochenen Haupt- und Grundgedanken der Philosophie, nach festen Grundlagen der Kulturgebiete zu suchen, zu systematisieren imstande ist.

Er weist hier zunächst die infolge ihrer Beobachtung der Prozesse des Seelenlebens scheinbar am leichtesten zum Ziel führende psychologistische Methode energisch ab: die Psychologie basiert auf Empfindungen und Wahrnehmungen; wie wäre also ein derartiger schwankender Maßstab, dem der Empirismus eine Hauptstütze ist, imstande, in Wissenschaft, Sittenlehre und Kunst unverrückbare Normen zu schaffen?

Das psychologische Verfahren kann nach Cohen wohl auf die elementarste Untersuchung der Erkenntnisse angewendet werden, gerät aber in unlösbaren Konflikt bei fortgesetzter Anwendung auf die tieferen Bewußtseinsprobleme.

Verfehlt wird ferner dieses Ziel einer begrifflichen Fundierung reiner Erkenntnis, sobald ein über seine Bedeutung hinausschießender Kritizismus die Wissenschaften in selbstgeschaffene Formen zwingen will; ein Schauspiel, das wir in dem Fichte-Hegelschen Idealismus beobachten können, der die Wildlinge seines Denkens der Wissenschaft aufzupfropfen die Kühnheit hat, ohne sich an die in jener von innen heraus treibenden Mächte zu kehren, die sie allen Philosophastern zum Trotz frisch und fröhlich auf eigenen Bahnen vorwärts treiben. „Die Philosophie hat nicht Dinge zu erzeugen, sondern zunächst lediglich zu verstehen und nachzuprüfen, wie die Objekte und Gesetze der mathematischen Erfahrung konstituiert werden“[7]).

Ungeachtet dieser Kritik des subjektiven Idealismus ist jedoch auch Cohens Standpunkt, wie wir schon oben bemerkten,

[7]) H. Cohen, Kants Theorie d. Erf., S. 578.

ein idealistischer, indem er argumentiert, daß die Wissenschaft selbst in ihren grundlegenden Prinzipien mit Begriffen operiert, die jeder realen Existenz entbehren, und somit der sich an die Wissenschaft anlehnende philosophische Kritizismus, nachdem das Sein in jener seine Taufe empfangen hat, notwendig zu einem transzendentalen Idealismus werden muß[8]).

„Transzendental" ist die Devise Cohens, und so tritt er aufs nachdrücklichste für die transzendentale Methode[9]) ein, deren Wert er allein zur Gewinnung der „Hebel und Wertmesser der wissenschaftlichen Erfahrung" bestehen läßt.

Damit wir in der Lage sind, die Gründe eines absolut sicheren Wissens zu erkennen, muß die transzendentale Untersuchung das Gesetz in der Wissenschaft zur Kategorie erheben und in ihm nicht etwa bloß psychische Kombinationen vermuten.

Die Frage nach den psychologischen Quellen einer bestimmten Erkenntnis verblaßt vor der Wichtigkeit einer Prüfung des Erkenntniswertes der Elemente; und diese Untersuchung, die an der Leistung dieser ersten Erkenntnisse gegenüber Wissenschaft, Sittlichkeit, Kunst zu bemessen ist[10]), bildet den roten Faden, der sich durch Cohens System hindurchzieht.

Die Elemente sind das die Objekte der Wissenschaften Bestimmende; dasselbe Verhältnis, welches die Technik und Physik zur rein konstruktiven Mathematik besitzt, besteht in gleicher Weise in allen anderen Kulturgebieten.

Wie Scheler ausführt, weichen die verschiedenen Anhänger der transzendentalen Methode in dem gegebenen Datum wesentlich voneinander ab. Die Variabilität der Methode in dieser Hinsicht wird eine noch größere, insofern bei Cohen selbst in der letzten Periode seines philosophischen Schaffens eine Metamorphose zu verzeichnen ist. Was ist nun für Cohen in seinem „System" das Gegebene? Er sagt: „Dem Denken darf nur dasjenige als gegeben gelten, was es selbst aufzufinden vermag"[11]). Sobald dem Denken ein Inhalt einfachster Zusammensetzung

[8]) Lindheimer, S. 12 u. 13.

[9]) Eine treffliche Charakterisierung der transzendentalen Methode gibt Dr. M. Scheler in seinem Buche, Die transzendentale und psychologische Methode u. s. w., Leipzig 1900.

[10]) Lindheimer, S. 16—23.

[11]) Cohen, System der Philosophie, I. Teil, S. 68.

begegnet, so hat es sich dieses Inhaltes sofort hinsichtlich der Rechtmäßigkeit seines Ursprunges zu vergewissern[11]), weshalb jeder einfachste Inhalt stets in der Bestimmbarkeit eines x gedacht werden soll. Dieses x wird jedoch verdächtig, wenn es erst nach vollzogener Eingehung von Verbindungen, also im Zustande eines A, auf seine legitime Abstammung aus dem Denken geprüft wird, zum mindesten geht in diesem Falle das Denken seiner Reinheit verlustig, und auf deren Erhaltung ist ja Cohen vor allem bedacht. Das „Ding" selbst ist für Cohen nicht etwa in der Empfindung gegeben (System S. 55); es muß durch die Einheit des Urteils, zu welcher dessen beide Richtungen, Sonderung und Vereinigung, zusammengewachsen sind, in der Einheit der Erkenntnis erzeugt werden.

Das Ding in dem betrachteten Sinne ist für Cohen noch nicht Gegenstand; zu diesem wird es erst, indem sich aus der Erhaltung der Einheit ein resistierender Bestand bildet[12]).

Wir hatten schon gelegentlich der Erörterung der Frage, wie man transzendentale Begriffe sicher gewinnen könnte, über die Verschwisterung gesprochen, in der Cohen Philosophie und Mathematik gedacht wissen will; ein ähnliches Verhältnis soll auch zwischen Naturwissenschaft und Mathematik bestehen, denn erstere ist ein zielloses Umhertreiben in der Fülle der Erscheinungen, solange sich nicht die phänomenalen Erzeugnisse mathematischen Denkens in ihr realisieren können. Lassen wir indes unseren Philosophen über seine Auffassung des Zusammenhangs von Philosophie und Mathematik einerseits und von Naturwissenschaft und Mathematik andrerseits in seinen eigenen Worten sprechen, er sagt:

„Kritische Philosophie[13]) ist diejenige, welche nicht nur schlechthin mit der Wissenschaft Zusammenhang hat und auch nicht schlechthin mit der Naturwissenschaft, sondern in erster Linie mit der Mathematik, und erst durch sie und an ihrer Hand mit der Naturwissenschaft. Die Mathematik gilt dem-

[12]) Staudinger polemisiert im 8. Bande der Kantstudien gegen diese Auffassung. Auf seine Einwände, die wir nicht für stichhaltig erklären können, einzugehen, ist hier nicht geboten; die speziellen Punkte philosophisch-mathematischer Natur besprechen wir im Nachwort.

[13]) In seinem Vorwort zu Langes Geschichte des Materialismus, 5. Aufl., p. XVII.

zufolge als eine Methode der Naturwissenschaft, und zwar als diejenige, mit welcher die Naturwissenschaft in eigentlicher Bedeutung erst Wissenschaft wird: ohne welche jeder andere Anfang der Naturwissenschaft somit als ein unmethodischer erkennbar wird, wenngleich Jahrhunderte mit einem solchen sich begnügen mögen und begnügen müssen."

Cohen steht mit dieser Ansicht, wie wir bereits sahen, nicht allein da; es sind ihm hierin, wie es die Wucht, Größe und Evidenz der Forderung mit sich brachte, außer Kant noch drei der Besten vorangegangen: Plato[14]), Descartes und Leibniz. Um also den Cohenschen Standpunkt verstehen und würdigen zu können, ist es hier am Platze, die spezielle Geschichte des Problems, wie es sich in jenen Denkern zur Äußerung bringt, mit nachdrücklicher Anlehnung an Cohens Ausführungen eingehender zu erörtern.

Will man von den Beziehungen Platons zur Mathematik oder besser zur Geometrie sprechen, so ist vor allen Dingen seine Entdeckung der analytischen Methode hervorzuheben. Aus der angeschauten Figur heraus stellen wir die Behauptung C auf; soll diese wahr sein, so muß das aus ihm gefolgerte B und endlich ein letztes A Gültigkeit haben; ist A eine erste Gewißheit, so folgt daraus auch die Gewißheit von C; ist dagegen A ein Absurdum, so haben wir es mit einem Fall der *εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγῶν*, der indirekten Beweise, zu tun. Eine derartige Methode kann natürlich nur bei Umkehrbarkeit sämtlicher Zwischen-Hilfssätze gelten. Ist sie somit im eigentlichen Sinne mehr die klassische Methode bei speziellen Aufgaben, so hat sie es auch andererseits verstanden, sich als Wünschelrute bei der Auffindung neuer Sätze unentbehrlich zu machen, sie „bereitete den Boden für die synthetische Geometrie der Griechen"[15]).

Die analytische Methode sichert sich ihre Stärke durch „die Darstellung in der Anschauung"; den roten Faden indes bildet das auch für Cohen so charakteristische „reine Denken"[16]).

---

[14]) Die mathematische Beschäftigung der Pytagoreer gipfelte, wie wir gesehen, in billigen Spekulationen; erst bei Plato wird die Mathematik zum eigentlichen Vorwurf für die Philosophie.

[15]) Vorwort zu Langes Gesch. d. Mat., p. XVIII.

[16]) Cohen, System d. Philosophie, S. 4 u. 5.

„Der Zusammenhang zwischen den Bedingungen zur Lösung der Aufgabe[16]) und der Lösung selbst war nicht in der Anschauung gegeben und durch Anschauung allein nicht herzustellen; dazu bedurfte es des Rechnens und Schließens, also solcher Verfahrungsweisen, welche, wie der Gleichlaut der Worte es andeutete, Denken sind oder im Denken beruhen. Der Methodiker der Anschauung blieb somit, was er durchaus war, Methodiker des Denkens.“ Die Mathematik hat in der Wahrnehmung allerdings nicht ihre Legitimation; indessen wäre es ihr auch nicht möglich, ohne die Empfindung auszukommen[17]). So wendet sich Platon der Wahrnehmung zu und wird bei dieser Untersuchung der Vater eines Gedankens, den Cohen „für den fundamentalsten in der gesamten Geschichte der Erkenntnistheorie“ erklärt, und der Plato zu einem Vorgänger Kants macht[18]). Gemeint ist der Satz von dem Unterschied in den Wahrnehmungen. Während die eine Art der Wahrnehmungen in ihrer vollen Selbstgenugsamkeit von uns erfaßt wird, verlangt die andere die Ergänzung durch das reine Denken, dessen „Epikrise“[18]) [19]). Bei der letzteren Art veranlaßt uns ein geheimnisvoller „Zug zum Sein“ zur Abkehr vom Sinnendinge vermittelst des mathematischen Denkens. Vernunft und Sinnlichkeit werden durch diesen mathematischen Teil der Wahrnehmung miteinander verknüpft. Die Arithmetik[20]) wird auf diese Weise „die Leitung zur Schau des Seienden“, die Geometrie die „Erkenntnis des beständig Seienden“.

Mathematik ist also eine auf dem Denken beruhende Methode. Hierauf gründet sich ihre Bedeutung in der Wissenschaft und für die Philosophie Platons. Die mathematischen Begriffe werden von ihm nicht in einer Reihe mit den übrigen Ideen aufgezählt; die Geometrie ist ihm die Mittlerin zwischen Ideen und Dingen. Erst nach der Beschäftigung mit dem ἀεὶ ὄν könne man sich dem Studium der wechselvollen Naturdinge hingeben (Kants Theorie d. Erf., S. 14f.).

[17]) Cohen, Kants Theorie d. Erf., S. 10.
[18]) Cohen, Platons Ideenlehre und die Mathematik, S. 16.
[19]) Kants Theorie d. Erf., S. 11.
[20]) Ideenlehre, S. 18—19, 22—25.

Platons Vorliebe für die Mathematik, seine Hochachtung geometrischer Gewißheit läßt sich aus der in seiner Philosophie vollzogenen Adoption des mathematischen Fachausdruckes Hypothesis, erkennen. Nach der *ὑπόθεσις*, der Grundsetzung, Grundlegung, wird in der von ihm entdeckten analytischen Methode geforscht; „das analytische Moment der Hypothesis verbürgt es, daß die Grundsetzung eben wegen ihres reinen, in der Methode[21]) grundsetzenden Denkens gegründeten Charakters den Begriff der Ursache — *αἰτία* — des geistigen Seins und jeglichen Seins der Erscheinung erfüllt und vollendet."

Aus dem *ἀσφαλὲς τῆς ὑποθέσεως* begreift sich somit die Natur des Axioms, und, in dieser grundlegenden Bedeutung auf das ganze platonische System übertragen, wird es zum Gegenstand des grundsetzenden Denkens, zur Idee, welche hier gleicherweise der bedingende Grund für die Wahrheit einer einzelnen sinnlichen Gegebenheit wird. Die Frage nach der Sicherheit der Hypothesis, der Idee, ist somit in apodiktisch bejahendem Sinne beantwortet; und auch die Dinge werden hierdurch zu Beispielen für das mathematische Denken, deren Sein nicht mehr als ein problematisches verworfen werden kann.

Aristoteles, das Gegenspiel platonischer Erkenntnistheorie, hat nicht das Verständnis für die Bedeutung der Mathematik. Bedeutsam ist daher die von Cohen an diesem Denker geübte Kritik. Die Mathematik, die allein die Erkenntnis des beständig Seienden vermitteln kann, ist von Aristoteles zu seiner Physik in kein Verhältnis gebracht worden, und so mußte die aristotelische Physik stets eine mangelhafte und ebenso die Metaphysik in ihren Grundbegriffen eine unfruchtbare bleiben[22]). Auch für Cartesius war die Grundlage und das Kriterium menschlichen Wissens die Mathematik; sie ist ihm die Wissenschaft schlechthin, das Ideal, und er verteidigt sie gegen den Verdacht, als wäre sie lediglich ein Kartenhaus geistreicher Spekulation, das nur fiktive Bedeutung habe. Reine Mathematik und Physik sollen verschwistert sein, „denn es geschieht alles

---

[21]) Die Lehre von der Hypothesis wurde eingehend behandelt von Cohens Schüler Martin Altenburg: „Die Methode der Hypothesis bei Platon, Aristoteles und Proklus", Marburg 1905. Daselbst obiges Zitat S. 32.

[22]) Cohen, Kants Theorie d. Erf., S. 20—22.

in der Natur auf mathematische Weise, und die Gesetze der Mechanik sind identisch mit denen der Natur“[23]).

Quantität und Ausdehnung im Raum wurden ihm dadurch identisch, Verdünnung und Verdichtung „bloße Änderung der Gestalt“.

Quod valde clare et distincte percipio verum est; erst mit der Wahrheit entsteht die Wissenschaft als „eine vollkommen gewisse und zweifellose Einsicht“[24]); so sind Arithmetik und Geometrie die Wissenschaften par excellence, denn die Klarheit ihres Gegenstandes gestattet unserer Erkenntnis jederzeit eine untrügliche Entscheidung über die Richtigkeit oder Falschheit ihres Kalkuls; in der Mathematik ist uns somit der Kompaß in dem Wirrsal des Zweifels gegeben.

„Soll Gewißheit in den philosophischen Fragen erlangt werden, so müsse man von der Gewißheit der Geometrie und Arithmetik ausgehen. So bezieht Descartes die Philosophie wieder wie einst Plato auf die Mathematik und macht die Gewißheit derselben zum eigentlichen Problem der philosophischen Untersuchung“[25]).

Die Mathematik hat sich aus einem artigen Spielzeug des menschlichen Geistes zu der achtungsgebietenden Methode des Naturerkennens, zur Mathematik der Naturwissenschaft entwickelt; denn die Entdeckung der analytischen Geometrie durch Descartes war das Sprungbrett, von dem aus die Wissenschaft allein dieses Ziel erreichen konnte. Diese unermeßlich große Tat der Aufstellung des Koordinatensystems hätte allein genügt, den Namen Kartesius durch Ewigkeiten fortklingen zu lassen.

„In der Entdeckung dieser neuen Methode liegt sein eminentes Verdienst als Begründer der Wissenschaft und dadurch zugleich als Reformator der Philosophie“[26]).

Um das Wesen der Natur zu erkennen, werden uns Hebel und Schrauben auf die Dauer nicht genügen können; nur die Entfernung vom Sinnlichen führt zur Gewißheit; in der Abstraktion liegt die Kraft, die Geschehnisse zu erkennen, sie wissenschaftlich zu erzeugen; die Mathematik in ihrer Sorglosig-

[23]) Natorp, Descartes' Erkenntnislehre etc., S. 101.
[24]) Natorp, S. 5.
[25]) Cohen, Kants Theorie d. Erf., S. 27.
[26]) Kants Theorie, S. 28.

keit um Sein oder Nichtsein ihrer Ausgeburten in der Natur reicht uns auf diesem Wege willfährig die Hand. Die Mathematik macht eben einen der Wesenheit des Geistes ureigenen Teil aus; ihre Sätze, so neu sie jedesmal sind, erscheinen uns wie alte Bekannte.

Wollen wir Descartes' Bedeutung im einzelnen kurz zusammenfassen, so liegt sie wesentlich in folgenden Punkten:

1. Er lehnt die Frage ab, ob es in der Natur der Mathematik ähnliche Dinge gibt, ob die Natur Kopie der Ideen resp. umgekehrt sei (Kant nennt dies von Descartes verworfene Verfahren Dogmatismus).

2. Die Dinge müssen im Geiste und in den Gesetzen entdeckt und gegründet werden.

3. Das Inventar des Geistes, das sogenannte „Angeborene" wird damit zur „allgemeinen Regel".

Durch das cogito, ergo sum kommt allerdings eine Zweideutigkeit hinein; die Erkenntnis wird hinsichtlich ihres Gehaltes der Willkür des erkennenden Subjektes unterworfen. Gerade das vorbildliche mathematische Denken kümmert sich nicht um das Dasein der Dinge; jetzt aber soll „in der Darreichung und Gewährleistung[27]) des sum die Kraft des cogito bestehen"[28]).

Leibniz erhob als Mechaniker Einspruch gegen Descartes' mechanischen Irrtum, daß die Ausdehnung zugleich Materie sei. Eine solche Annahme verwechselt das Notwendige mit dem Hinreichenden insofern, als die berechtigte Forderung, die Natur müsse sich in mathematischen Buchstaben schreiben lassen, zu der Ansicht überspannt wurde, „daß die Geometrie in der Ausdehnung die Materie schlechthin zu konstruieren vermöge". Descartes' Fehler war eben, daß er das geometrische Denken schlechthin als Denken faßte. Wenn Leibniz auch anerkennt, daß Cartesius durch sein Deutlichkeitskriterium der Substanz des Denkens den ersten Platz einräumt, so muß er doch konstatieren, wie hier allmählich eine Verschiebung zugunsten der Substanz der Ausdehnung stattfindet. Vielmehr muß bezüglich der Natur allein die Instanz des Denkens angerufen werden;

[27]) Cohen, Kts. Th. d. Erf., S. 32.

[28]) Hierzu: Cohen, Kants Theorie d. Erf., S. 33—37 und Cohen, Das Prinzip der Infinitesimalmethode u. seine Gesch., § 29.

„in den zu findenden sachlichen Momenten des Denkens“ müssen wir die Handhaben erblicken, mittels welcher wir über die reine Mathematik hinaus in die Natur dringen können.

„Das Kriterium des Denkens muß von seiner lediglich formalen Bestimmtheit[29]) gereinigt werden.“

Bei Leibniz wird das Denken konstituierende Macht; dies zeigt sich besonders in seiner Infinitesimal-Analysis, die mit ihren jeder sinnlichen Anschauung entzogenen Grundlagen umsomehr zur Natur hinführt. So wird gerade der Empiriker zum „Verteidiger und Verteter des reinen Denkens“[30]).

Wie Descartes ist ihm die Natur das Feld der Untersuchung mittels der Mathematik; das Zustandekommen der Anschauung durch die Natur bietet ihm ein untergeordnetes Interesse, es gilt ihm, „mit den reinen Mitteln der Mathematik die Natur in ihren Begriffen und Gesetzen zu entdecken und darzustellen“[31]).

Das Intensive, noch teilweise in der Bedeutung des Inextensiven, erweitert den Zahlbegriff, indem es sich nunmehr, von der Kontinuität hervorgerufen, der Anschauung[32]) entzieht, in welcher es vorher als extensive Größe gewirkt hat; besonders begreiflich wird dieses Intensive des Infinitesimalen bei der Geschwindigkeit als quantitas velocitatis.

Das Intensive wird ihm auch in der Dynamik zur Wurzel des Materiebegriffes, wie wir es in der Schöpfung der Monaden als immaterieller Kräftepunkte beobachten können. Unzufrieden mit der Descartesschen Erzeugung der Gebilde durch die Ausdehnung, versucht er es mit dem Unausgedehnten und findet seine notwendige positive Ergänzung[33]) im Intensiven.

Analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung entzauberten den Blick der gelehrten Welt zu einem verständnisvollen Begreifen des Zusammenhangs zwischen Wissenschaft und Philosophie; ihr prinzipieller Wert macht sie zu „Grundkräften der Wissenschaft“.

[29]) K. Th. d. E., S. 37.

[30]) Cohens Vorwort zu Fr. A. Langes Gesch. d. Mat., p. XXI—XXII.

[31]) Cohen, Kants Theorie d. E., S. 42.

[32]) Cohen, Prinzip d. Inf.-Meth., S. 69 ff.

[33]) Cohen, Kants Theorie d. Erf., S. 38. Zum Ganzen sei hier auf das Buch von Cohens Schüler Dr. Ernst Kassirer hingewiesen: Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen. Marburg 1902.

Andererseits hat aber Leibniz intellektualistisch das Denken überspannt und damit den Charakter der formalen Logik verfehlt, „in welcher er den Grund aller Wahrheit sah, auch der der materialen“[34]).

Wir übergehen hier die Einwürfe, die dem Leibnizschen System von Cohen in anderer Hinsicht gemacht worden sind, und wenden uns zum Königsberger Philosophen; ohne jedoch an dieser Stelle Leibniz' Zeitgenossen, Newton, unerwähnt lassen zu können, dem es bei ähnlichen Anschauungen, wie sie Leibniz hatte, gelang, darin über diesen hinauszugehen, daß er das System der Natur aufstellte, während er andererseits die Wissenschaft und die Philosophie identifizierte und somit die letztere vielmehr ausgeschaltete[35]).

Aus der Newton-Leibniz-Bewegung hervorgegangen, und zwar innerlich mehr dem großen Engländer genähert, stellt Kant in einem gewissen äußerlichen, neubildenden Gegensatz zu Newtons philosophiae naturalis principia[36]) seine „metaphysischen Anfangsgründe der Naturwissenschaft auf“, woraus hervorgeht, daß nunmehr die Naturwissenschaft aufgehört hat, zugleich Naturphilosophie zu sein.

Bei seiner grundsätzlichen Auffassung der Mathematik als Methode der Naturwissenschaft und allein als solcher findet es Cohen unverständlich und zwecklos, wenn Kant in seiner Kritik die Apriorität der Mathematik besonders von der der Naturwissenschaft behandelt; Mathematik ist für Kant eben noch etwas mehr als nur Methode: „So kam es,“ und dies ist das Wichtige, „daß sie überhaupt nicht als Methode in Frage gezogen wurde, sondern als selbständige Wissenschaft, als selbstgenügsame Synthesis a priori:“

Und hierin empfing Kant ein verhängnisvolles Erbteil aus dem Newtonschen Nachlasse, daß er der Anschauung eine Stelle vor dem Denken einräumte, daß „die bloße Mathematik in den Formen der reinen Anschauung abgesondert zur Analyse gelangte“. (Gemeint ist Kants transzendentale Ästhetik in der Kritik der reinen Vernunft.)

---

[34]) Cohen, Kants Th. d. Erf., S. 39.
[35]) Cohen, Vorwort zu Fr. A. Langes Gesch. d. Mat., p. XX—XXII.
[36]) Vergl. Vorwort zu F. A. Langes Gesch. d. Mat., p. XXIII.

Das ist im wesentlichen der Punkt, der die Kritik Cohens an Kants Philosophie der Mathematik hervorgerufen hat. Was er von Kant übernommen hat, und das ist das meiste, gehört in die Darstellung seines Systems.

Kant selbst aber habe den Versuch gemacht, diese Fehler zu überwinden, nämlich

a) daß Mathematik eine selbstgenügsame Lehre sei,

b) den Dualismus von Anschauung und Denken, auf dem seine im übrigen richtige Lehre von der synthetischen Natur der mathematischen Urteile beruht[37])[38]).

Kant habe zwar die Begriffe Form und Materie, also den Dualismus, von Älteren übernommen, aber Kant präzisiert und vertieft diese in der ganzen neueren Philosophie typische Bedeutung der Form seinem neuen eigensten Begriff gemäß dahin: „daß die Form die Kraft bedeute, jene Materie nach demjenigen, was an ihr solid und real ist, zu bestimmen, zu erzeugen, sie selbst also zu realisieren". Das Denken erzeugt also das Reale, wobei Kant den Fehler vermeidet, Licht und Luft a priori zu konstruieren u. s. w.[39]). Im Interesse der Ökonomie und gerundeten Präzision der Arbeit wollen wir uns weiterer einleitender Ausführungen begeben. Erwähnt sei hier nur noch, daß diese Punkte, in denen Kant über sich hinausstrebt, auch die Richtlinien sind, in denen etwa ein Heinrich Herz die philosophische Grundlage der exakten Naturwissenschaft zu gewinnen sucht.

---

[37]) Vergl. Cohen, Kants Theorie d. Erfahrung, S. 390—405.

[38]) Die Unterscheidung der Urteile in synthetische und analytische, die Kant für die Kritik des Erkenntnisvermögens für unentbehrlich hält, hat eine große Debatte hervorgerufen. (Vergl. Vaihingers Kant-Kommentar, Bd. 1.)

Abschließend hat Sigwart sie für die Logik als unbrauchbar, für die Erkenntnislehre aber als unumgänglich notwendig erklärt, was ganz auf Kants Ansicht hinauskommt. Paulsens Argumentation gegen Kant (F. Paulsen, I. Kant in Frommans Klassiker der Philos., S. 134 ff.) begeht den fundamentalen Fehler, Wort und Begriff zu verwechseln, wenn P. sagt: 10+3= „drölf" wäre nach Kant synthetisch, 10+3= dreizehn wäre nach Kant analytisch.

[39]) Vergl. S. XXIV—XLV des Vorworts zu Fr. A. Langes Gesch. d. Mat.

II. Teil. Cohens System.

Die Grundlegung.

§ 1.

Den Schwerpunkt des Cohenschen Werkes bildet die Frage nach der Herkunft der reinen Begriffe. Das Denken allein soll das Sein entdecken und seine Grundlagen schaffen. „Das Denken ist das Denken des Ursprungs." (System S. 34.) Der Satz, der für das gesamte System gilt, daß die Grundlegung alles Seins im reinen Denken zu finden ist, gilt auch für die Mathematik.

Die „Grundlegung" kann in keiner Weise durch die Psychologie gewonnen werden, diese setzt als Wissenschaft vielmehr die Grundlegung voraus und ist in die Wissenschaften einzugliedern, die ihren Zusammenhang im System der Methoden finden.

Da diese Grundlegung ein Denkakt, ein „Vorgang des Erkennens" ist, so ist die Zuhilfenahme der Psychologie in diesem Falle ein leicht zu begehender Fehler, da dem Verkennen ihrer eigentlichen Machtsphäre eine subtil gezogene Grenzlinie Vorschub leistet[1]).

Ist somit die Grundlegung im reinen Denken sicherzustellen, so kann sie nicht aus der Entwickelungsgeschichte festgestellt und aus dem Empfinden, dem man fälschlich objektiven Charakter zuschreibt, gewonnen werden.

Noch Kant selbst hatte der Sinnlichkeit dabei allzuviel zugetraut. Er sah in ihr die Vermittlerin des Gegebenen, und so nimmt bei ihm die Zeit als Form der reinen Anschauung eine wichtige Stelle ein.

„Das Mehr, das der Zeit als Anschauung zustehen soll[2]), macht jedoch ihre Reinheit verdächtig. Die Gegebenheit bedroht

---

[1]) Cohen, System der Philos. I. Teil. Logik der reinen Erkenntnis. Berlin 1902, p. 15—16; 19—21.

[2]) Cohen, System, S. 128.

ihre Reinheit. Geht etwa das Denken weniger auf den Gegenstand? Soll nicht auch der Gegenstand des Denkens zum Gegenstand der Erfahrung werden, also auf Erfahrung bezogen, mithin gegeben sein? So macht die Anschauung sich selbst und das Denken verdächtig.“

Mit Hilfe der Kategorien hat Kant die beiden Modi der Zeit, Folge und Zugleichsein, ans Licht gefördert. Hierin aber lag gerade der Mangel, der schon längst den Verdacht hätte rege machen müssen, aus der Quelle der reinen Sinnlichkeit heraus zu sicheren Grundelementen des Denkens zu gelangen. Cohen will die Anschauungsform, unter welcher Kant die Zeit auffaßte, wieder zu einer Denkform machen. Die Zeit soll wieder Kategorie werden, denn als solche braucht er sie, damit die Mehrheitszahl entstehen kann. Die Bedeutung der Zeit als Kategorie liegt eben hauptsächlich in der Intensität, mit der sie „Bedingung des Gegenstandes“ ist; der Begriff der Mehrheit oder des Inhaltes steht und fällt mit ihr. Das Denken der Logik als das Denken der Wissenschaft ist autonom, und es heißt ihre Bedeutung herabdrücken, wenn man ihr eine Hilfsdisziplin, eine Kritik, mit auf den Weg gibt. Dies mußte Kant tun, „weil er der Logik eine Lehre von der reinen Sinnlichkeit voraufschickte“. (System S. 34.) Die selbstkritische Logik der reinen Erkenntnis ist allein imstande, den großen Ursprung in seiner ganzen Reinheit zu gewinnen. Gewiß war Kants Verdienst ein immenses, aus dem Wirrwarr der Empfindungen die reine Sinnlichkeit herausgeschöpft zu haben; in der Gestalt aber, wie sie sich bei ihm als reine Anschauung herausbildete, muß sie überwunden werden, und sie wird durch Cohen überwunden, indem die Zeit als Kategorie durch die Bildung der Einheiten der Mehrheit zur Voraussetzung des Raumes wird, wie wir bald sehen werden.

Bevor wir an die Behandlung dieses Ursprungs gehen, sei hier noch eines Verfahrens Erwähnung getan, welches in der Mathematik unter dem Namen „Grenzmethode“ eine unumschränkte Autorität besitzt und mitunter geradezu als Grundlage mathematischen Denkens angesehen wird. So können wir, nach Berechnung des Radius zu Polygon-Umfängen und fortwährender Vermehrung der Seitenzahl vermittelst des Grenzprinzipes zur Bestimmung der Kreisperipherie gelangen, so

finden wir durch Vergrößerung von m in dem Ausdruck: $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ die Reihe für e; man denke an das bestimmte Integral, das seinen Wert aus der Reihe der allmählich zusammenschrumpfenden Rechtecke schöpft, usw. Dieses Verfahren wird allgemein etwa folgendermaßen ausgedrückt:

Eine Funktion besitzt für einen bestimmten Wert m die Grenze M, wenn nach Annahme eines beliebig kleinen σ eine Umgebung von m gefunden werden kann derart, daß die Differenz des Funktionswertes für eine dieser Umgebung entnommene Größe und der Grenze M absolut genommen kleiner als σ bleibt.

Indessen müssen wir uns vor einer leicht möglichen Überschätzung dieses Verfahrens hüten; seine Bedeutung besteht doch bei aller Gründlichkeit und Strenge seines Vorgehens nur in einer untergeordneten Hilfeleistung, einer Kontrolle der Rechnung. Indem sie vom Endlichen ausgeht, kann sie nicht die eigentlichen Grundlagen entdecken, die sich der Sinnlichkeit entziehen und „gerade deshalb den Grund der Endlichkeit“ (System S. 114) vertreten können. Auf das Unendlichkleine müssen wir unsere Hoffnung setzen; „es ist nur sensualistisches Mißverständnis des Unendlichkleinen, wenn man nach einem anderen Mittel der Realität verlangt; wenn man im Besitze der Infinitesimal-Rechnung ein Mittel der Realität vermißt“. (S. 113.)

Das Intensive, welches das Rückgrat des Infinitesimalen bildet, kann durch die Grenzmethode nicht gefunden werden; denn nur, „solange der Übergang von Punkt zu Punkt, von Einheit zu Einheit nur negativ nicht als Sprung vorgestellt wird, so lange genügt die Methode der Grenzen, welche den Begriff der anschaulichen Extension prinzipiell nicht ausschließt“[3]).

§ 2.

Das Unendlichkleine ist der wunderbare Talisman, dem die höhere Mathematik überhaupt ihre Existenz verdankt, mit dem sie schließlich sogar das Unendlichgroße zu bändigen vermag.

Das Unendlichkleine nun, das Infinitesimale, macht Cohen zum Gegenstand eingehendster Betrachtung und kommt schließ-

[3]) Cohen, Prinzip d. Inf.-Meth., S. 69.

lich zu dem Resultate, daß dasselbe nicht aus der [illegible] stammen kann. Da das Infinitesimale „der Bedingung der Realität gerecht werden soll, so ist es begreiflich, daß es der Anschauung entzogen sein muß, wenn anders die Realität [illegible] reinen Verstandesbegriff" eine Bedingung der Erfassung von Seiten des Denkens zu bedeuten hat".

Dem oberflächlich urteilenden Verstande, wenn [illegible] tritt hier vielleicht bei Besinnung der Größe zu dessen Begriff ein eklatanter Widerspruch mit der Forderung der Nichtanschaulichkeit entgegen. Dieser Widerspruch ist ein scheinbarer [illegible] den Terminus mißverstehenden Auslegung des Begriffes „Anschauung".

Niemand hat mehr Herren und diesen Launen gedient als das Wort „Anschauung".

„Anschauung im Sinne des erkenntnismäßigen Terminus darf nämlich nicht gedacht werden als eine Kenntnis auf einen Gegenstand bezogene Erkenntnis, sondern lediglich als ein Erkenntnismittel, als das Element einer Methode." . . . „während die objektive Anschauung ein Erkennen ist, welches durch Anschauen und Erkennen bedingt wird"[1]. Cohen fordert die „[illegible] als Gegebenes, oder kurz mit Gegebenheit".

Die Anschauung ist nicht nur eine andere, „auch eine [illegible] Die räumliche Extension, welche das Wesen der ersteren Anschauung ist, enthält in sich ein Subsense, welches in seiner [illegible] der darin bestand, daß eine Größe nicht in der Anschauung [illegible] gegeben werden könnte".

[1] Prinzip der Inf.-Meth. usw., S. 65 f.
[2] Prinzip d. Inf.-Meth., S. 78.

§ 3.

Um die wissenschaftliche Entdeckung des „Dinges" herbeizuführen, bedarf es der Physik und der Mathematik; der Weg, den sie bei dieser Entdeckung zu gehen haben, wird ihnen durch das Urteil vorgeschrieben.

Es entsteht hier die Grundfrage nach dem, was für das Urteil als gegeben (data, δεδομένα) gelten darf. Die Sensualisten meinen, die Empfindung wäre das Material. Aus der Empfindung kann man aber die Grundlegung nicht gewinnen.

„Niemals hätte man sich so weit verirren können[6]), daß man für das Denken in der Empfindung eine Ergänzung anerkannte, wenn man das Prinzip des Ursprungs für das Denken festgehalten hätte. Nur das Denken selbst kann erzeugen, was als Sein gelten darf." Letzteres ist so zu verstehen, daß das Denken nicht die Dinge schafft, sondern nur ihre Geltung als solche.

Kein Empfinden indes vermag zu helfen, wo das Denken versagen sollte: die Versuche, derartiges zu leisten, erinnern an die der Quadratur des Zirkels; und wenn gerufen wird: „Man müsse dem Denken die Existenz hinzufügen. Man müsse dem Begriffe Existenz beilegen. Woher sie nehmen, so daß sie verwendet werden kann?" (System S. 67.) Hier liegt eben der stets wiederkehrende Irrtum, daß man dem Denken etwas verleihen will, was es nicht aus sich selbst geschöpft hat.

Die Verwirrung entstand dadurch, daß das Wort „gegeben" zweideutig ist; auch Kant hat sich niemals auf eine genaue Bestimmung dieses Terminus eingelassen. „Gegeben" kann Existenz und Bestimmbarkeit bedeuten; in letzterem Sinne ist es für die Mathematik wichtig und wird hier im Gegensatz zu der Stumpfheit eines A mit dem Buchstaben x bezeichnet, der sich in diesem Kapitel durch den hier geeigneteren Terminus „Etwas" ersetzen läßt.

Die Grundlagen der Bestimmbarkeit müssen aber in dem reinen Denken erzeugt werden. Da wir nun aus dem Etwas nicht wieder zum Etwas gelangen können, muß unser Urteil in logischer Verlegen- und Verwegenheit in den Abgrund des

[6]) System, S. 65.

Nichts springen; nicht in selbstmörderischer Absicht, sondern von der frohen Zuversicht getragen, drunten des Rätsels Lösung zu finden:

„Auf dem Umwege des Nichts stellt das Urteil den Ursprung des Etwas dar.“ (S. 69.)

Das Nichts[7]) ist hier indessen nicht in dem Sinne absoluter Verneinung zu verstehen, sondern in seiner Auffassung liegt etwas durchaus Positives; nicht ein *οὐ* dürfen wir unter diesem Nichts verstehen, vielmehr ein *μὴ*, welches andrerseits, wie wir sehen werden, im Grunde nur wieder das mit dem Gesetze der Kontinuität ausgestattete *οὐ* ist.

Der Kompaß nun zur Entdeckung des Etwas aus dem Nichts bietet sich in dem Begriffe der Kontinuität dar. „Als Gesetz des Denkens wird die Kontinuität zuvörderst unabhängig von der Empfindung, für die es nur Diskretion gibt oder gar nur die Einheit eines Haufens. Das Denken erzeugt Einheit und den Zusammenhang von Einheiten[8]). So ist das Denken als das Denken der Einheit durch den Zusammenhang bedingt.“ Durch die Kontinuität wird der Abgrund des Nichts überbrückt; unter dem Schutze der Kraft des Zusammenhanges geht unser Urteil auf dem Umwege des Nichts zur Erkenntnis des Etwas hindurch, in ihr haben wir das Denkgesetz der Erkenntnis.

„Kraft der Kontinuität werden alle Elemente des Denkens“, insofern sie als Elemente der Erkenntnis gelten dürfen, aus dem Ursprung erzeugt.“

Wie die Kontinuität das Urteil von der Empfindung scheidet, so macht die Identität das Urteil von der jeweiligen Vorstellung unabhängig.

Identität besagt Bejahung des Urteils und ist Denkgesetz der Wahrheit, wie der Satz des Widerspruchs das Denkgesetz der Unwahrheit ist.

Das Etwas mußte aus dem Nichts geboren werden, um eine legitime Abkunft zu bekommen; nicht etwa seine Zwillingsschwester wird doch zu gleicher Zeit mit ihm die Qualität ge-

[7]) „Das Nichts bedeutet überall den wahren Übergang; denn es ist die Abwehr des Etwas als eines Gegebenen, sei es in der Empfindung, sei es sonstwie. Diese Abwehr allein führt zum Ursprung hindurch.“ S. 76.

[8]) System, S. 76.

[9]) System, S. 76.

boren, die Beschaffenheit des reinen Denkens: denn das reine Denken beginnt mit jener[10]). Diesem Ursprunge entsprechen auch die Identität und der Widerspruch; wir nennen die drei die Urteile der Qualität. Sie müssen den ersten Schritt bilden, den das reine Denken zu tun hat.

Damit ist die Grundlegung des Urteils im reinen Denken erfolgt, auf die sich die Erkenntnis der mathematischen Urteile aufbauen kann.

§ 4.

Die Realität ist das Postulat des Unendlichkleinen; die Realität gehört damit auch zu den Voraussetzungen der Geometrie und ist ein unentbehrliches Mittel in der mathematischen Naturwissenschaft zur Erkenntnis zu gelangen. „Ohne den Begriff der Realität nämlich wäre es nicht wohl rätlich, anstatt der Sinnlichkeit das Denken zur ersten Bedingung wissenschaftlicher Erkenntnis zu machen“[11]).

Im Kampfe gegen die Anmaßung der Sinnlichkeit schätzt die Realität diese nur hinsichtlich ihrer Kongruenz mit dem eigenen, die Natur konstituierenden Beitrage. Indem wir bezüglich der nichtsinnlichen Gegebenheit der Realität auf § 3 zurückweisen, ist es klar, daß der Raum die Realität nicht involviert, sondern dieselbe voraussetzt.

„Das Infinitesimale geht der Anschauung vorauf und liegt ihr zugrunde: Imo extensione prius so bezeichnet Leibnitz das Unendlichkleine. Also im reinen Denken ist es gegründet[12]), und kraft dessen vermag es den Grund des Endlichen zu bilden. Der Ursprung ist also der Grund, das Urteil und keine Empfindung und keine Anschauuung.“ Ersatz der Empfindung ist daher die Voraussetzung bei der Realität des Unendlichkleinen.

Das Unendlichkleine soll fortan den Lebensnerv der Mathematik ausmachen, es ist das diamantene Atomon, welches das mathematische Denken bewegt und bestimmt.

Die Würdigung keines Forschungsresultates ist mehr an die Kenntnis seiner Geschichte geknüpft, als es bei dem Infini-

---

[10]) System, S. 97.
[11]) Prinzip d. I., S. 128.
[12]) System, S. 106.

tesimalen der Fall ist. Seine fundamentale Bedeutung tritt hier gleich zu Anfang darin hervor, daß seine Entdeckung und die der Realität durch eine dreifache Problemstellung dringlich gemacht worden war; es sind dies:

1. das Tangentenproblem in der Geometrie,
2. das Reihenproblem in der Algebra,
3. das Problem der Geschwindigkeit und Beschleunigung in der Dynamik,

welche alle durch das gemeinsame Problem des Ursprungs untereinander verwandt sind.

Werfen wir hier einen Blick auf das erste, welches verlangt, an einen bestimmten Punkt einer Kurve eine Tangente legen zu können. Kennen wir das Gesetz dieser Tangentenlegung, so ist zugleich durch den gemeinsamen Punkt eine Erzeugungsmöglichkeit der Kurve gegeben, somit wird die Kurve „der Inbegriff solcher sie erzeugenden Tangentenpunkte". Der Punkt kann nun nicht mehr als Grenze der Linie aufgefaßt werden, er erhält in sich, als dem Erzeugenden, zugleich das Gesetz der Richtung.

„Diese Absolutheit des Punktes, sofern in ihm die Richtung liegt[13]), und die Erzeugung der Kurve ununterbrochen von ihm ausgeht, zeichnen wir als Realität aus."

Man hüte sich nun ja davor, indem man fortgesetzt in den Fehler verfällt, das Unendlichkleine räumlich anschauen zu wollen, mit ihm wie mit den extensiven Zahlengrößen als einem bloßen Hilfsmittel der Rechnung der Naturwissenschaft eine Dienstmagd ins Haus schicken zu wollen. Das Unendlichkleine begründet die Dinge und Vorgänge der Natur, während wir mit den Zahlen nur Relativitäten feststellen können. Im Infinitesimalen gelangt das Sein als Realität zur Definition. Von hier aus ergibt sich auch die nähere Bestimmung der Kontinuität als des Zusammenhanges der infinitesimalen Elemente. Im Unendlichkleinen haben wir auch den exakten Begriff der Einheit, aus dem sich durch das Prinzip der Kontinuität die Zahl entwickelt.

[13]) System, S. 109.

§ 5.

Der Ursprung der Zahl stammt nicht aus der Sinnlichkeit, sondern aus dem Urteil der Realität, aus dem Unendlichkleinen.

Noch aber ist die Zahl inhaltslose Unbestimmtheit, vielmehr Bestimmbarkeit, das x im Verhältnis zum dx. Aber der Inhalt ist die Hauptsache, und den Inhalt bringt das Urteil der Mehrheit: das x wird zum bestimmten A gemacht, eine Bestimmtheit, die wir aber immer noch keinen Inhalt nennen können; dieser Inhalt bekommt erst Fleisch und Blut, wenn wir eine in Hinsicht auf A gestellte Verschiedenheit B zum Anderssein hinsichtlich A zu mildern suchen; aber „die Verschiedenheit wird nicht aufgegeben, sondern nur zurückgeschoben". (System S. 133.) Sie wird gedämpft zum Problem der Mehrheit, in welcher Gestalt wir allein das sonst zu spröde Gebilde A + B in Angriff nehmen können.

Die Wurzel der Zahl liegt in der Antizipation, indem ich auf Grund der Reihenkontinuität Glieder vorwegnehme. Die Leistung der Zahl beruht vor allem darauf, daß sie eine neue Einheit erzeugt, die Einheit einer Mehrheit, „die nur additiv zu denken ist"[14]). Während noch die Einheiten unverknüpft nebeneinander stehen, naht die Einigung und durchtränkt die Mehrheit: so wird diese unbeschadet ihrer Eigenschaft zu einer Kette von Einheiten, mithin selbst eine Einheit. „Eine Einheit des Denkens ist die Mehrheit, und Gebilde, Erfolge des reinen Denkens, sind die Einheiten." (S. 135.)

Aus dem Übersehen der sich in dem Bruche vollziehenden Einheit resultiert seine Unterschätzung seitens der Griechen. Die Mehrheit in ihm ist doch als Kategorie eine Denkeinheit, wodurch seine Gleichwertigkeit mit der ganzen Zahl ausgeprägt wird: durch die sinnliche Anschaulichkeit der in ihm enthaltenen, durch Zähler und Nenner vertretenen Mehrheit, die zu einer Einheit zusammengewachsen ist, ist es scheinbar das schönste Paradigma für diese Cohensche Argumentation[15]).

---

[14]) System, S. 135.

[15]) Hierbei müssen wir jedoch eine Verwechselung des Wesens mit seinem Symbol feststellen, die indes nicht an den Nerv der Sache geht. Das Zeichen $\frac{a}{b}$ ist nur eine ganz schematische Symbolisierung der ge-

Aus dem Zusammenhang der Zeit mit der Zahl erklärt sich nach Cohen auch das Additionstheorem: $a + b = b + a$. Das Pluszeichen, welches gewissermaßen der Schrittmesser für die Leistung der Zeit bei ihrer vorwegnehmenden Tätigkeit ist, ist an dem Ausdruck das Wichtigste und bezeichnet das dem a im Grunde Vorangehende; man hat sich den Vorgang zu denken, indem man sich die Zeit personifiziert hinter a stehend vorstellt, die mit ihren Händen, als etwa den Trägern der Zukunft, an a vorbei nach b greift.

So ist zeitlich betrachtet b das erste Element, das in Frage kommt, wenn auch a mit der personifizierten Gegenwart zunächst in Berührung gelangt. Dies die Erklärung der rechten Gleichungshälfte.

Andererseits involviert die rechte wieder die linke Seite, insofern hier angezeigt wird, wie b „durch die im Plus liegende Vorwegnahme erzeugt wird". (Die rechte Seite zeigt also das Verfahren der Zeit bei ihrer vorwegnehmenden Tätigkeit, die linke das Verfahren der Vorwegnahme selbst; zwischen beiden liegt eine wohlzubeachtende Verschiedenheit. Gewiß ist das Resultat rechts wie links das gleiche; nach Cohen sind aber hier nicht die Resultate, vielmehr die Handhabung der Zeit und das Verfahren gleichgesetzt, was uns eben ein absurdum zu sein scheint.)

Aus dem gleichen Zusammenhang erklärt sich der Stellenunterschied der Zahlen, wo der Wert der Zahl nicht in der Lage sondern in der Stelle liegt, die ganz ähnlich wie oben eine Stelle in der Zeit bedeutet.

Kant hatte die Zahl durch Synthesis in der Zeit zustande kommen lassen, die Zeit also zum logischen Bestimmungsgrund der Zahl gemacht: „Es ist nicht nur Verkennung der Zahl und

---

brochenen Zahl; wir könnten ja sonst auch den Ausdruck $\sqrt[a]{b}$ anführen, der dann ebensodeutlich diese Einheit der Mehrheiten hervortreten ließe, während er doch in Wahrheit die Sprengung der Mehrheit vertreten soll. Wenn auch $\frac{m}{n}$ nach Bachmann (Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen, Leipzig 1892, S. 8) der „Ausdruck einer ganz bestimmten Forderung" ist, so ist diese doch dem Symbol als solchem noch nicht inhärent; als dieses Symbol aber betrachtet Cohen den Bruch, wenn er von Zähler und Nenner spricht.

Herabminderung ihres Wertes, welche bei ihrer Verwechselung mit der Zeit unvermeidlich ist, sondern es ist ebensosehr Beeinträchtigung der reinen erzeugenden Bedeutung der Zeit, welche darin latent ist“ [16]).

Wir haben den eigentümlichen Charakter der Zahl im vorangegangenen gesehen: Die Korrelativität der Einheit zur Mehrheit. „Diese Korrelativität schließt den Gedanken aus, daß die Einheit als eine starre, sei es gegebene, sei es absolute, gedacht werden dürfte.“

Als gegeben wäre sie durch ihre Anschauung zur Wertlosigkeit herabgesunken, als absolut wäre sie durch ihre Sprödigkeit ohne jede höhere arithmetische Bedeutung; was dem Unendlichkleinen seine force majeure gibt, würde für die kompakte Zahl Lähmung aller ihrer Fähigkeiten bedeuten.

Das Unendlichkleine indes, der Ursprung der Zahl, ist noch nicht die Zahl selbst, denn in ihm stellt sich noch keine Mehrheit dar; wir müssen deshalb stets den Unterschied zwischen absoluter Einheit und Mehrheit beachten.

Die charakteristische Leistung der Zahl und ihre hauptsächliche Schätzung beruht in der Diskretion, indem sie mit Hilfe der ihr inhärierenden Mehrheit die Dinge trennt und sie wiederum mit Berücksichtigung ihrer Sonderheiten einander zuordnet. Diese Zuordnung bleibt bei der größten Anstrengung der diskreten Zahl immer nur eine recht fadenscheinige Einheit, vielmehr eine Mehrheit; die Diskretion vermag eben ihrer Aufgabe nicht völlig gerecht zu werden. In dieser verzweifelnden Erkenntnis packten wir die Zahl mit dem Prinzip der Kontinuität von Grund aus, das will sagen im Unendlichkleinen, an und fanden die stolze, neue Zahl [17]) als Zahl der mathematischen Naturwissenschaft. So wird die Diskretion durch die Kontinuität abgelöst, welche von der Mathematik bei ihrem rastlosen Überwinden aller Diskretionen als unentbehrliches Hilfsmittel gebraucht wird. Mit ihm schafft die Wissenschaft „eine gediegenere Diskretion, als diese selbst gewährleisten konnte“.

In der Algebra waltet das Prinzip der Mehrheit in Gestalt der Variabilität. Auch in den subtilen Tiefen mathematischen

---

[16]) System, S. 138.

[17]) Die hierauf bezügliche Kritik siehe im Nachwort, S. 48.

Denkens, wo das Prinzip des Infinitesimalen die Führung übernimmt, wahrt diese Variable, mit dem ja nicht etwas Unbestimmtes, vielmehr Bestimmbares, gewissermaßen schon im voraus Gegebenes bezeichnet wird, in seiner inhaltserzeugenden Eigenschaft seine unersetzliche Gegenwart. „Überall ist es Sonderung, Ersonderung, welche in den Methoden Gegensätze aufrichtet, die durch die Korrelation dieser Methoden zur Schlichtung kommen sollen, wie die diskreten Einheiten durch ihre Zuordnung der Mehrheit vereinigt werden.“ (S. 142.)

Die Zahl bedeutet das Sein, denn sie erzeugt den Inhalt; und wenn sich auch dieses Sein aus der antizipierenden Tätigkeit der Zeit herschreibt, so ist doch die Ansicht, die Zahl wäre subjektiven Charakters, eine irrige, da ja zufolge ihres Prinzips der Mehrheit die Erzeugung des Inhaltes mit dem Erzeugnis, dem Inhalte, identisch ist; beide sind nur Erscheinungsformen der einen Mehrheit. Nachdem das Unendlichkleine als Ursprung den Denkinhalt erzeugt hat, bildet sich derselbe unter dem gegensatzbildenden Urteil der Mehrheit weiter aus.

Die Anschauung vermag der Zahl nicht bis zum Infinitesimalen zu folgen, denn „ein Ding läßt sich nicht als Unendlichkleines abzählen“. Gerade hier, wo jede Vorstellung weit zurück bleibt, wo eine Vergleichung unmöglich wird, gerade hier liegt für die Zahl die Wurzel ihrer Realität. Bei dieser Auffassung der Zahl erscheint dieselbe geradezu als die Emanation des Unendlichkleinen, das Infinitesimale als der Brennpunkt der Zahl. So wird das Infinitesimale, man möchte sagen zur Entelechie der Zahl; es gibt ihr erst die lebendige Innerlichkeit, kraft deren sie imstande ist, sich weit über die antike Auffassung ihrer Natur als starrer Diskretion fast zu der Aktivität eines beseelten Individuums durchzuringen.

Ist nun die Tendenz der Mehrheit noch gleicherweise auf die Irrationalzahl anwendbar, auf jenes bekanntlich inkommensurable, d. h. durch keine Einheit zu erschöpfende Zahlgebilde, das wir nur durch eine in infinitum fortgesetzte Reihe darstellen können? Da die Einheit fehlt, dürfen wir auch keine Mehrheit zulassen; aber die scheinbare Unbestimmtheit dieser Zahlbildung ist nichts weniger als eine solche: vielmehr, meint Cohen, sind wir an einen neuen Zahlbegriff gelangt, der uns in seiner gegenwärtigen Bestimmungslosigkeit ein stolzes Rätsel aufgibt.

Wir müssen uns gänzlich der Mehrheit begeben, um die Reihenzahl verstehen zu lernen: in der Reihe werden die Glieder in ihrer Einzelheit überhaupt nicht gedacht, „nur als Schemen für die Plus-Setzung figurieren sie“. (S. 152.)

Die Reihenzahl zielt auf höchste Bestimmtheit, während die Mehrheit in der Unbestimmtheit den Ausdruck ihrer eigensten Natur besaß; bei der Mehrheit ließ sich ein Rest von Subjektivität nicht beseitigen; die Einheiten, welche sie zu ihrer eigenen Äußerung erst bilden mußte, waren nicht allein für sie da; diese waren immerhin noch ein Erzeugnis für sich, ein über die Mission der Mehrheit hinausschießendes Zuviel, welches ihrem Wachstum wie ein Schatten anhaftete. Dies fällt bei der Reihe fort.

„Bei der Reihe dagegen handelt es sich um den Abschluß und nur um ihn“ . . . „Die Vollendung der Reihe, das ist der Begriff der Reihe.“ (S. 153.)

War das erzeugende Prinzip der bisherigen Zahlgebilde die Mehrheit, so tritt nunmehr an ihre Stelle die Allheit; die Allheit findet ihre Repräsentantin in der unendlichen Reihe.

Diese eigentümlichste aller Schöpfungen rechnerischen Denkens will und kann nicht mehr unter der Auffassung der endlichen Plus-Erzeugung betrachtet werden, in welchem Falle wir nichts mit ihr anfangen könnten, sondern sie fordert von dem Urteil den Sprung ins Unendliche.

Sie versagt bei stellenweis vorrückendem, einigendem Verfahren und findet ihre Erklärung in dem „Begriff ihrer unendlichen Zusammenfassung“.

Die Zusammenfassung der Reihe gibt eine neue Einheit, einen neuen Begriff.

Indem die Algebra die Aufstellung der unendlichen Zahlreihe als des Symbols des durch die Allheit bewirkten Zusammenschlusses schuf, hat sie ihr Höchstes geleistet und ist am Ende ihres Könnens.

Nunmehr tritt das Integral an ihre Stelle, welches das Unfertige — insofern, als wir es in der unendlichen Reihe immerhin nur mit einer Symbolik[18]) und einem andeutenden Schema zu tun haben — aufnimmt und das Problem des Zu-

[18]) Siehe § 6 und Nachwort.

sammenschlusses aufs glänzendste löst. „Das Integral ist nichts anderes als die Allheit, in welcher die unendliche Reihe mit dem Unendlichkleinen sich verbindet.“ (S. 156.)

Das Infinitesimale in ihm ist der Nerv seiner Leistungsfähigkeit. Das Integral ist es, das uns die Natur begreifen lehrt, denn da jedes Endliche in eine unendliche Summe unendlicher Kleinheiten zerlegt gedacht werden kann, vermögen wir dasselbe, als ein bestimmtes Integral, im rechnenden Denken zu gründen und zu begreifen.

„Wenn also das Differential die Realität als eine konstituierende Denkbedingung[19]) geltend macht, so bezeichnet das Integral das Reale als Gegenstand.“

Diese Hochschätzung des Infinitesimalen von seiten Cohens geht so weit, daß er das Endliche für ein „gewagtes Konkretum“ bezeichnet, „gestützt höchstens durch eine sinnliche Auffassung der Zahl, welcher das Ding vorerst gegeben ist, auf daß es gezählt werden kann“. (Prinzip d. I., S. 145.)

Cohen betrachtet die Differentialrechnung nur als einen Werdeprozeß im Vergleich zur Integralrechnung; über dem Operieren mit infinitesimalen Größen steht als höhere Aufgabe die „Verbindung des Infinitesimalen mit dem Unendlichen der Allheit“; bei dieser Wichtigkeit der Integralrechnung müßte man im Grunde das Differential eher die Umkehrung des Integrals nennen. Doch auch die Differentialrechnung hat einen unschätzbaren Wert; ihre Aufgabe liegt nicht darin, mit infinitesimalen Größen in ihrer isolierten Absolutheit zu operieren, wobei sie wohl schwerlich Resultate aufzuweisen hätte: „Immer ist die Korrelation zum Endlichen der Sinn und Zweck der ganzen Sache.“ Das Infinitesimale ist die absolute Einheit in bezug auf das von ihr gegründete Zahlsystem, sie erscheint aber unter dem Bilde der Relativität hinsichtlich der Infinitesimalen höherer Ordnung. Daß das Unendlichkleine eine Mehrheit im Cohenschen Sinne sei, könnte aus dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = F$ nachzuweisen versucht werden. Hier ist indes dy eine Mehrheit der dx als absoluter Einheiten. Dieses $dy = F \cdot dx$ ist also noch keine Mehrheitszahl, da sich eine solche durch Antizipation

[19]) Cohen, Prinzip d. Inf.-Meth., S. 144.

endlicher Einheiten bildet. Merkwürdigerweise läßt sich Cohen auf eine Untersuchung dieses F . dx gar nicht ein; er nimmt es widerspruchslos in sein System hinein, ohne das Neue zu merken, das in ihm enthalten ist; er geht infolgedessen in der Erklärung des Irrationalen fehl, wie wir später zeigen werden. Das dy, dem noch ein dx hintersteht, ist eben nicht die absolute Einheit; es ist ein Komplex derselben[20]). Wie konnte Cohen nach der dem Differential beigelegten fundamentalen Bedeutung von dem Verhältnis zweier Differentialen sprechen, während er ja ausdrücklich die Beweglichkeit von dx bezüglich höherer Ordnungen bemerkt, dx ist aber zu dy von der gleichen Ordnung[21]). Es gibt eben als Ursprung der endlichen Zahl nur eine einzige absolute Einheit; eine neue, dy, durch die Hintertreppe einzuführen, welche die erste noch obendrein in sich enthält, hieße bei vorhandenem dolus dem arglosen Leser eine Nase drehen. Und so sind wir der Ansicht, daß jede ernste kritische Betrachtung der Cohenschen Mathematik ganz besonders auf diesen Punkt ihr Augenmerk richten muß; in dem $dy = F . dx$ liegt die verborgene Klippe, welche Cohen nicht bemerkt, an der aber das ganze System scheitern kann[22]). Dagegen ist der Differentialquotient der Ausdruck für die Methode, durch welche das Infinitesimale vermittelst seiner Kontinuität aus sich heraus die Endlichkeit erzeugt, insofern eben auch das dy eine Vielheit der dx, ein F . dx, ist.

Eine Verquickung infinitesimaler und endlicher Verhältnisse finden wir in der allmächtigen Taylorschen und Mac-Laurinschen Reihe, in denen mit Ausnahme des ersten Gliedes alle Summanden aus einem Produkt eines Differentialquotienten mit einem endlichen Quotienten zusammengesetzt sind. Ihren unersetzlichen Wert haben diese Reihen dadurch erlangt, daß sie einen Blick in die Werkstatt der absoluten Einheit gewähren, deren Zweck es ist, zum Endlichen hinzuleiten.

---

[20]) Was ist es dann, wenn es weder Mehrheitszahl noch absolute Einheit sein kann? Siehe Nachwort.

[21]) Zwei infinitesimale Größen heißen von derselben Ordnung, wenn ihr Quotient gegen einen von Null verschiedenen, endlichen Grenzwert konvergiert: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

[22]) Im Nachwort wird gezeigt werden, wie diese Klippe, gehörig verarbeitet, zum Prunkstein des Systems wird.

§ 6.

So weit geht die Bewunderung für das Verfahren der unendlichen Summation, daß man nicht weit davon entfernt war, in ihm einen neuen Gottesdasein-Beweis zu erblicken[23]); das Dogma von der Menschwerdung der Gottheit könnte in dieser Gleichsetzung der unendlichen Ausbreitung mit der endlichen Begrenztheit eine treffliche Stütze erblicken.

Das geheimnisvolle Vorwärtsrieseln des unendlichen Verfahrens, welches, mit der Ausbreitung eines Tropfens auf glatter Fläche vergleichbar, der Erfüllung seiner Mission ohne Abschluß näher kommt, würdein seiner Bedeutung nicht so überschätzt worden sein, wenn man es beizeiten von anderen mathematischen Gebilden unterscheiden gelernt hätte; die Zahl ist der Repräsentant einer Tat, einer Vollendung, die Reihe das Schema des zu vollziehenden Verfahrens; die Zahl gibt das Was, die Reihe das Wie der Methode an. Die Bedeutung der Reihe als selbständigen Rätsels sinkt noch mehr, wenn man bedenkt, daß sie mehr eine Analyse als eine Synthese der Zahl ist. Wir können wohl einen bestimmten Wert in eine Reihe auflösen, es bleibt uns aber im allgemeinen versagt, eine beliebig gegebene Reihe zu einer begrenzten Endlichkeit zusammenzufassen. Doch zurück zu unserem Philosophen! Das Urteil der Allheit hatte in seiner Reihenzusammenfassung zum Integral und damit zu der Zahl als Inhalt geführt.

Was ist der Inhalt, der „in dem Kosmos des reinen Denkens in Zahlen“ begründet wird, und zu dessen Erzeugung sich die antizipierende Eigenschaft der Zeit betätigte? Es ist die Kategorie des Raumes! Was unterscheidet denn aber hier den Raum von der Zahl? „Dasselbe, was die Geometrie von der Arithmetik unterscheidet“.

[23]) So Bernoulli in seinem Motto:

Ut non finitam seriem finita coercet
Summula, et in nullo limite limes adest,
Sic modico immensi vestigia numinis haerent
Corpore, et in angusto limite limes abest
Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas!
In parvo immensum cernere, quanta, Deum!

Was die Zeit nicht hat erfüllen können, der Raum wird es bringen; der Raum ist befähigt, Natur und Denken, das Äußere mit dem Inneren zu einer Wechselwirkung zu bringen. Solange die Kategorie der Zeit dem Denken allein beistand, war von einer Trennung der reinen Erzeugnisse von den bloßen Kreaturen des phantasierenden Verstandes noch nicht die Rede: erst „die reine Erkenntnis enthält die Beziehung auf den Gegenstand der Natur". (System S. 161.)

Diese Möglichkeit einer reinen Erkenntnis wird jedoch erst durch den Raum zur Wirklichkeit. Der Raum als Kategorie versetzt das Denken in die Fähigkeit, das Sein seiner eigenen Immanenz gegenüberzustellen; welches somit wieder auf das Innen zurückzielt und nicht etwa an diesem Punkte eine Dualität hervorruft. Indem also gewissermaßen das Denken das Außen erzeugt, wird „das Denken zum Denken der Natur, also zum Sein". (S. 162.)

Als heftiger Gegner des Empirismus polemisiert Cohen gegen die Auffassung, welche das Denken zur Vorstellung macht, indem sie dem Inneren nicht die Fähigkeit einer apriorischen Entfaltung des Äußeren zutraut. „Der Raum sollte nur Empfindung und allenfalls das sogenannte Produkt von Empfindungen, das Nachbild derselben in der Vorstellung, sein." Dieses Verfahren ist ein Sichdrehen im Kreise; man setzt nichts, kommt aber auch zu nichts.

Die Zeit findet eine notwendige Ergänzung in der Allheit des Raumes.

Ohne den letzteren würde es dem Bewußtsein versagt sein, zu bleibendem Inhalt zu gelangen, denn in der rastlosen Eintönigkeit der unaufhörlichen Antizipationen würde das Rückwärts das Vorwärts treiben, ohne zur Ruhe zu kommen.

Der Raum schafft den Inhalt, indem er das Flüchtige bannt und das Beisammen hervorruft, welches das Außen ist und von dem Denken durch das „Werfen nach Außen" erhalten wird.

Diese inhaltserzeugende Tätigkeit des Raumes kommt ihm aber nur kraft seiner Unendlichkeit zu; sie würde versagen, wenn er als eine Begrenztheit die Fähigkeit besäße, noch Mehrheiten zu bilden, oder wenn er in der Mehrheit entstünde; „der Raum würde dann als eine Art der Zeit erscheinen". (S. 169.)

Der Begriff des Beisammens bedeutet eine Erweiterung des Bewußtseins, ein Hinaustreten aus dem Inneren, aus dem er neben dem dort waltenden Nacheinander keinen Platz hat.

Wie der Raum die geforderte Ergänzung der Zeit bildet, so ist andererseits die Zeit geforderte Voraussetzung des Raumes; denn da die Weise, ihn als Anschauung aufzufassen, eine irrige ist, so muß er mit den Erzeugnissen operieren, die die Kategorie der Zeit geschaffen hat, die Einheiten der Mehrheit.

Indessen ist auch der Raum noch nicht der letzte Ausdruck für den Inhalt der Erkenntnis, sondern seine Allheit Voraussetzung für den Inhalt der Natur. Das Beisammensein ist, wie wir sahen, nur auf das Äußere zu beziehen; durch diese Tätigkeit des Nachaußenwerfens von seiten des Bewußtseins wird das Feld für die Gestaltung der Natur geschaffen.

Das Beisammen des Raumes wird durch die später zu betrachtende Kategorie der Bewegung aufgelöst; der Raum wird zu einem Projektionsfeld, das als solches erhalten bleibt, in welchem nur das augenblicklich in Frage kommende Gebilde eine gewisse Flüssigkeit erlangt.

Hierauf beruht die Koordinatentheorie des Descartes, deren Grundprinzip das der Korrelation ist, denn jeder Veränderung eines Punktes auf der Abszissenachse entspricht eine ähnliche auf der Ordinatenachse, und durch die Forderung einer Unverrückbarkeit der Achsen wird ermöglicht, daß die im Raume sich bewegenden Punkte trotzdem stets in ihrer Lage angebbar sind.

§ 7.

Zum Schluß dieses Kapitels sei eine kurze Zusammenfassung des Vorangegangenen gestattet.

Wir gingen von der Forderung aus, es sollten mit Hilfe von Urteilen der Mathematik, soweit eben deren Zuständigkeit reicht, Erkenntnisinhalte gewonnen werden, und fanden in der Realität, die wir im Infinitesimalen entdeckten, das erste Hilfsmittel.

Mit ihm gelangten wir zur Mehrheit, zur endlichen Zahl, die, als sie in dem Wirbel der Zeit verschwinden wollte, durch die hinzutretende Allheit ihrem eigentlichen Zwecke, dem Hinaustreten in den Inhalt der Natur, zugeführt wurde. Hier wird

ihnen die Möglichkeit einer Steigerung in infinitum gegeben, womit das empirische Bewußtsein des eigentlichen Raumes seine Erklärung gefunden hat.

Anwendung der Mathematik.

§ 1.

Die Mathematik ist lediglich dazu da, um die Methode der systematischen Naturwissenschaft zu sein; als deren Werkzeug kann sie allein in ihrer Reinheit verstanden werden. Nach Galilei ist die Natur in mathematischen Buchstaben geschrieben, der die Natur durchwebende Begriff der Größe ist, meint Cohen, keine Kategorie, sondern hat die Zahl und den Raum zu seinen Elementen; hier finden wir die erste Möglichkeit zu einer wissenschaftlichen Annäherung zwischen Mathematik und Naturwissenschaft. An dieser Stelle ist es wichtig, darauf hinzudeuten, daß man sich hüten möge, den Begriff des Axioms, wie er in der Mathematik die Grundlage bildet, in die mathematische Naturwissenschaft hineinzubringen. Gerade darin lag die Ursache, daß das Altertum nicht zu einer mathematischen Behandlung der Erscheinungen vordringen konnte, daß man das neue hier waltende Prinzip nicht erkannte. Neue Beobachtungen und Versuche lassen hier niemals eine Ableitung der Gesetze aus Axiomen zu. Das Gesetz war es, welches sich in der neuen Zeit vor dem Axiom als eine Notwendigkeit fühlbar machte; das Gesetz nimmt in dem zu betrachtenden Wissenszweige eine solche führende Stellung ein, daß wir es als Kategorie erkennen.

Gegenüber allen Einwendungen, die da betonen, ein Gesetz sei doch etwas durchaus wandelbares, welches mit jeder Bereicherung der Erfahrung ein neues Gewand anziehe, ist zu erwidern, daß in allen Veränderungen der Begriff der Bewegung als fester Kern steckt; Cohen drückt dies in den Worten aus: „Das Gesetz steuert auf die Natur los, zu der das Axiom, um ein Platonisches Gleichnis zu brauchen, nur hinblinzelt. Das Steuerruder aber ist der Begriff der Bewegung.“ (System S. 222.)

Die Bewegung, die empirisch nicht zu ihrem Recht kommt, findet ihren Begriff in der Verbindung der mathematischen Grundmethoden.

Die Bewegung ist ja auch, wie oben gezeigt, das treibende Moment, das sich die analytische Geometrie zum Vorwurf nimmt. In der Starrheit der Achsen, die bei dieser Sonderdisziplin ein für alle mal als fest aufgestellt werden, sieht Cohen die Charakterisierung der Substanz als des Beharrrlichen im Wechsel, das allem Veränderlichen als ein Sein zugrunde liegt: „Die Kategorie der Substanz betätigt sich als die Kategorie der Erhaltung in ihrer Korrelation zur Bewegung.“ (System S. 200.) Indessen ist es nicht möglich, einen direkten Übergang von der analytischen Geometrie zur Physik zu finden, denn indem Descartes den Raum mit den Zahlen bevölkerte, beschränkte er ihn zugleich in seiner Bedeutung und injizierte ihm den Schein der Subjektivität, da man die Zahl fälschlicherweise ebenfalls einem subjektiven Ursprung entstammen ließ.

Eine hohe und gerechte Würdigung findet bei Cohen die Funktion, die wir erst an dieser Stelle in unsere Betrachtung ziehen wollen, da sie fast ausschließlich von Cohen in bezug auf ihren Zusammenhang mit der mathematischen Naturwissenschaft untersucht und gewürdigt wird. Er ehrt sie durch Einverleibung in die Reihe der Kategorien.

Die Funktion ist der Ausdruck eines Naturgesetzes, und dadurch ist zugleich seine Stetigkeit bedingt, da ja Naturvorgänge sich stets kontinuierlich abspielen. Daraus wiederum folgt, daß die infinitesimale Realität die Voraussetzung für den Begriff des Gesetzes ist, indem jedes Element dieser Kontinuität vermittelst des Infinitesimalen aus seinem Ursprung muß erzeugt werden können.

Man soll nun nicht meinen, daß die ganze Wichtigkeit der Funktion darin bestehe, die Abhängigkeit zwischen x und y anzugeben; durch solche einseitige Betrachtung und Wertschätzung sinkt sie auf das Niveau einfacher algebraischer Gleichungen herab.

Ist es denn überhaupt angängig, von einer Abhängigkeit der beiden Variablen schlechthin und allein zu sprechen, ist nicht vielmehr diese Gegenseitigkeit ein unwichtiger Pleonasmus? Wie x sich y bedingt, so auch umgekehrt y das x. Diese Elemente sind ja nicht selbständig, vielmehr nur relativ; „mithin ist y im Verhältnis zu x nichts Neues, sondern lediglich das rückwärts gewandte alte Glied“. (S. 241.)

Die Frage nach der Natur der Funktion lautet daher zutreffender folgendermaßen: „Welcher Art müssen die ersten (infinitesimalen) Änderungen sein, um die andern bedingen zu können“. (S. 242.)

Durch die Termini der Mathematik erklärt, will das sagen: Kennen wir den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, so ist dadurch eine bestimmte, durch Integration zu findende Funktion $f(x)$ (bis auf eine Konstante) endgültig und bleibend konstituiert.

Die Funktion zerstört die naive Anschauung, „als ob die Abhängigkeit von einer äußeren Macht herrührte“. (S. 244.) Insofern sie das Symbol der Erhaltung ist, wird sie zur Kausalität, deren mystisches Dunkel sie enthüllt. „Nicht den Zusammenhang schlechthin stellt die Funktion dar und vertritt sie, sondern die Befugnis zu dem Vollzug dieses und nur dieses Zusammenhanges macht sie geltend.“ (S. 243.) Wie ein Einbruch von außen erscheint dieses Hineinplatzen von x in den „unschuldigen Kalkul“; hier jedoch müssen wir uns hüten, die ganze Bedeutung der Funktion in ihrer infinitesimalen Kontinuität zu suchen; die Funktion geht in ihrer Leistung weit darüber hinaus, auf Schritt und Tritt nur ihren infinitesimalen Ursprung zu zeigen, ihr Wert beruht ja in ihrer Befugnis, einen Zusammenhang bilden zu können.

Die Verschiedenheit, die anfangs zwischen y und dem fremd eingetretenen x bestand, wird durch die Eigenart der Funktion gemindert. In dem Augenblick des Hinzutretens von x nicht mehr eigentlich ein y zu nennen, wird es zu einem $f(x)$ gedämpft. Diese eingeschränkte Verschiedenheit ist der Sieg des reinen Denkens über den Aberglauben mystischer Außenmächte.

Man könnte also hiernach gewissermaßen die erwähnte Unschuld des Kalkuls als eine heuchlerische bezeichnen; nicht das x, nein, das y ist der Drache, der das Maul aufsperrrt, bis ihm ein harmloses x hineinfällt, dann seinen Verdauungsapparat in Bewegung setzt und schließlich eine Metamorphose in die Gestalt des $f(x)$ unternimmt. Das x wird zu $f(x)$ verarbeitet, und dieses $f(x)$ ist das neue Antlitz des alten y.

Gerade diese Verquickung der Verschiedenheit mit der Einerleiheit ist die eigenste Leistung der erhaltenden Eigenschaft der Funktion, womit sie sich von der bloßen Sukzession unter-

scheidet und zur Kausalität hinleitet. Die Erhaltung, die in der Funktion solche bestimmte Ausprägung erfahren hat, daß wir in x geradezu die Substanz erkennen können, macht diese Disziplin zur mathematischen Behandlung der Natur besonders befähigt. Hierdurch „wird die Kategorie der Funktion zur Kategorie der Kausalität". (S. 246.)

Die Daseinsberechtigung der Kausalität wird erst durch die Funktion legitimiert. „Sie darf nicht als eine äußere fremde Macht gedacht werden, welche auf heterogene Elemente Einfluß ausübte." (S. 247.)

Während in rein mathematischer Betrachtung f(x) nur die Änderung im Endlichen zum Verhältnis der Änderung im Unendlichkleinen anzugeben hat, ist es für die Physik geradezu das Symbol der Bewegung; die sich in der Funktion aussprechende Erhaltung, die in dem x für das y gleicherweise eine Rückerhaltung ist, bedeutet die Erhaltung der Substanz in der Bewegung und stellt die eigentliche Leistung der Kausalität dar. Auf diese Weise ist die Funktion die mathematische Übersetzung des Terminus „zureichender Grund", und diese Existenz eines gleichen Gedankens in Mathematik und Physik bietet den Punkt, wo sie ineinander übergehen können. Gleichzeitig sehen wir, „daß die methodische Einheit der mathematischen Naturwissenschaft auf dem Denkgesetz des zureichenden Grundes beruht".

§ 2.

Der mathematischen Naturwissenschaft sind gewisse Grenzen gesetzt; was hinter ihnen liegt, ist Naturbeschreibung. Daß auch dieser mittelalterliche Rest von der Sonde der Mathematik nicht verschont bleibt, zeigt die Chemie. Zugegeben nun, der gesamte Makrokosmus wäre in den Bereich mathematischer Erkenntnismöglichkeit gerückt, so bleibt doch das Leben ein Ignorabimus, und es ist uns versagt, das Bewußtsein verstehen zu lernen.

Aber die Mathematik ist schon auf dem Wege zur Erkenntnis!

Wir werden diesen Weg prüfen, spricht der Kritiker.

So beschäftigt sich denn Cohen eingehend mit dem Problem der Psychophysik, dessen prinzipiellen Fehler er aufzudecken

unternimmt. Wir berühren hier nur die für uns in Betracht kommenden Punkte.

Aus dem erklärlichen Bestreben, von der Psychologie als beschreibender zu einer Psychophysik als exakter Wissenschaft vorwärtszuschreiten, entstand die Forderung nach einer Theorie, die man in der Korrelation zwischen Reiz und Empfindung zu begründen suchte. So machte man die Empfindung zu einer Funktion des Reizes und verstand in: $y = f(x)$ unter y die Empfindung, unter der unabhängig hinzutretenden Variablen x den Reiz.

Der Grundfehler in dieser versuchten mathematischen Formulierung der Wechselbeziehung liegt in der Ansicht, daß y wie x sich kontinuierlich aus ihrem Ursprung entwickeln müssen. Das trifft jedoch nur beim extensiven Reiz zu; die Empfindung „als in der Ebenmerklichkeit fixiert, ist in solcher empirischen Fixierung als intensive Größe bestätigt“[1]), denn in dieser Auffassung kann doch die Empfindung zur Erforschung des Bewußtseins als des Problems der Psychophysik in Betracht kommen. Gleichmerkliche Empfindungen sind gleich groß, „die Empfindung von 31 Lot ist genau so groß wie die von 31 Pfund“. Somit handelt es sich also bei der Empfindung stets um diese Ebenmerklichkeit, dieses dy, während dx sich fortschreitend zu x entwickelt. Dieses y jedoch ist als Empfindung das, worin sich x als die objektivierte Empfindung spiegelt. Hierzu aber noch eine Formel aufzustellen, ist bedeutungslos.

Die Psychophysik also „geht nicht naiv zu Werke; sie benutzt das infinitesimale Maß, aber sie mißbraucht es“; denn sie will, uneingedenk der Bedeutung dieses Maßes als letzten Grundes des Denkens, diesen durch sich selbst enträtseln und dreht sich so im Kreise. Nach der Bewußtheit zu fragen, bedeutet den materialistischen Rückfall in die dunkelste Epoche naiven Philosophierens; eine derartige Frage sollte von der verständigen Forschung als außerhalb jeder Erkenntnis stehend, als abgetan betrachtet werden; „die Psychophysik aber hängt an dieser Frage und wurzelt in diesem unreifen Interesse“.

[1]) Prinzip d. Inf.-Meth., S. 155—156.

Kritisches Nachwort, unter besonderer Berücksichtigung des Irrationalen bei Cohen.

Cohens Tat, das Infinitesimale zum Grundzug unseres Denkens gemacht zu haben, ist in jeder Hinsicht von eminenter Bedeutung, um so mehr, als sie durchaus dem modernen Zeitgeist entspricht, der Mathematik und mathematische Naturwissenschaft aus der Quelle des Unendlichkleinen in gewaltigem Fortschritt hervorströmen sah.

Was hier Cohen genial aufgedeckt und dem wissenschaftlichen Denken erobert hat, lag unseres Erachtens schon längst im menschlichen Geiste begründet; nicht etwa, daß man das Infinitesimale durch Anschauung aus der Natur entnommen hätte — wir hätten die Naturdinge niemals zählend zusammenfassen können, wenn nicht das Unendlichkleine ein Element der erkennenden Vernunft wäre. „Die empiristische Erklärung von der Enstehung[1]) der Zahl ist weder selbstverständlich noch ernstlich zureichend.“ Dieses Prinzip ist in der Kontinuität der Zahlenreihe auf Schritt und Tritt erkennbar. Wenn auch ein naives und ungelehrtes Denken der 3 die 4 folgen läßt, so hat es dabei doch ein inniges Hinüberfließen[2]) von jener zur folgenden in der Vorstellung, obwohl zwischen den beiden eine für die reifere Forschung enorme Lücke klafft. Wir sehen, daß die Zahlen als Knotenpunkte einer kontinuierlichen Reihe zu betrachten sind; und diese Reihe hilft allein der zugrunde liegende Begriff des Infinitesimalen erzeugen. „Die Kontinuität beruht nicht auf der Raumanschauung[3]), sondern ist eine allgemeinere Voraus-

[1]) Prinzip d. Inf.-Meth., S. 21.

[2]) Dies gesteht selbst Helmholtz zu, wenn er sagt: „Zwei ist die Zahl, welche unmittelbar, d. h. ohne Zwischenschiebung einer andern Zahl, in der gesetzmäßigen Reihe auf Eins folgt.“ (Zählen und Messen-erkenntnis theoretisch betrachtet. Wissensch. Abh. Leipzig 95, 3. Bd., S. 361.)

[3]) Das Prinzip d. Inf.-Meth., S. 69.

setzung des Bewußtseins.“ Staudinger macht Cohen den Vorwurf[4]), daß er Zahl und Gezähltes miteinander verwechsele; also in den Fehler der Vermengung von Inhalt und Gegenstand eines Gedankens verfalle, indem er darauf hinweist, daß man bei der Zahl als einem abstrakten, losgelösten Begriff nicht von Kontinuität sprechen könne. Hiergegen muß betont werden, daß gerade bei der Zahl eine solche eventuelle Verwechselung erlaubt ist, hebt doch Cohen fortwährend nicht nur die Einheit, sondern gleicherweise die Mehrheit und also diese eigentümliche Verquickung in den Zahlengebilden hervor, so daß sie demnach einzeln betrachtet mit ihrem Begriff die ganzen bis zu ihnen hinleitenden tieferen Elemente der Anschauung mit einem Schlage vorzaubern. Die Mehrheit in der Einheit ist das wichtige Faktum, das Staudingers Einwand zurückweist. Ohne in die Cohensche Auffassung hineinzupfuschen, können wir uns vorstellen, daß jede Zahl ein Spiegel ist, welcher, dem Punkte der allgemeinen Entstehung zugekehrt, die Spiegelbilder der zu ihm führenden tieferen Zahlbegriffe auf seiner Fläche erblicken läßt; das Bild des Infinitesimalen wird in diesen Millionen Flächen vervielfältigt und gleicherweise beim Hineinschauen in die letzte virtuell ins Unendliche hinausgetragen. Der Spiegelungsinhalt jeder Zahl ist derselbe, nur der Trennungspunkt des Reellen von dem virtuellen Bilde macht die jeweilige individuelle Verschiedenheit in der unendlichen Kontinuität der Zahlfolge aus. Diese Fähigkeit, in sich das virtuelle Bild der ganzen jenseitigen unendlichen Zahlenreihe hindurchschimmern zu lassen, liegt in der Eigenschaft der Zahl als Mehrheit; das Wesen der Mehrheit ist ihre eigene Unbestimmtheit; insofern als sie sich einem definitiven Abschluß widersetzt, und jeder Zahlenbegriff schlechterdings höhere Zahlbegriffe involviert[5]) und

[4]) Kantstudien, Bd. VIII, 1903.

[5]) Wir möchten bei dieser Hinweisung der einzelnen Zahl auf die ganze unendliche Zahlreihe an den spinozistischen Gedanken erinnern, daß die adäquate Idee jedes Dinges zugleich die Idee Gottes, also der unendlichen Substanz, in sich schließt.

Überhaupt läßt das Leuchtfeuer des Unendlichkleinen die Paradoxie, die in dem Postulat adäquater Erkennbarkeit der Gottheit von seiten des endlichen Verstandes bestand, in milderem Lichte erscheinen, wenn wir in einem Verhältnis die vierte Proportionale suchen, wo der menschliche

nicht anders gedacht werden kann. Das A ist eben in jedem Augenblick als A + zu denken. Die Eigenschaft, unter der die Zahl bei Staudinger erscheint, ist im eigentlichen Sinne nicht das Wesen jener. Ihre Flüssigkeit, die sie infolge der Mehrheit besaß, erstarrt erst unter dem Allheitsurteil zur Einzelheit. Erst der Größe, aber nur ihr, gelingt es, diese Starrheit zu erlangen, „weil sie die Vereinbarung von Zahl und Raum ist".

Was gegen die vermittelst des Infinitesimalen im Denken versuchte Grundlegung ins Feld zu führen war, ist von Staudinger getan worden, so z. B. findet er es seltsam, daß die Zahl, die doch schon längst existiert, aus dem Infinitesimalen abgeleitet werden soll, seltsam auch den Umstand, daß man das Unendlichkleine zum Ursprung des Endlichen machen wolle, aus dem jenes erst abgeleitet sei.

Diese Einwürfe sind unberechtigt!

Cohens Verhalten diesem Dilemma gegenüber ist hier nicht dasjenige, welches bei logischer Weiterbildung seiner Zahlphilosophie zu erwarten wäre, denn die plötzlich gemachte Unterscheidung zwischen antiker Zahl und infinitesimaler Zählung ist völlig unmotiviert. Die erste, behauptet er, sei nur eine fiktive, an geometrischen Körpern sich erprobende Größe. Damit diese Denkgebilde als Objekte, als physische Dinge gezählt werden könnten, mußte das Infinitesimale entdeckt werden. Tatsächlich müssen bei einer solchen Auffassung die infinitesimalen Größen kleinen dinglichen Realitäten zum Verwechseln ähnlich werden, wie Staudinger meint. Wo liegt denn hier der Unterschied der beiden Zahlarten? Cohen sagt: „Wenn Dinge in Mehrheit gegeben sind, so fehlt noch viel, daß sie einem zählenden Geiste gegeben seien" (S. 22). Aber das Denken entdeckt doch erstlich diese Dinge in seinem Bewußtsein und hat mit nichts anderem als mit diesen seinen Kreaturen zu schaffen; zudem sind doch auch die mathematischen Idealgestalten zuvörderst in der Mehrheit gegeben. Besitzt denn die „antike Zahl" keine Kontinuität, folgen nicht ganze Zahlen, Brüche, Irrationalen in infinitesimaler Folge?

Verstand die mittlere, das Infinitesimale die erste bildet. Es sei hierbei auch an die menschlich kontrahierte Unendlichkeit des Cusaners erinnert. (R. Falckenberg, Gesch. d. neueren Philosophie etc., 5. Aufl., S. 21.)

Also ist schon in der antiken Zahl die infinitesimale Zählung enthalten. Das Unendlichkleine ist also ebenso ein apriorischer Begriff wie Zeit und Raum, ohne den eben weder vor noch nach seiner wissenschaftlichen Entdeckung weder Anfang noch Verlauf irgendwelcher kontinuierlichen Bewegung gedacht werden konnte[6]).

Gewiß war das Infinitesimale nicht stets in unserem Bewußtsein lebendig. Wir mußten zu ihm an der Kette der endlichen Zahlen hinabsteigen. Dieses Hinabsteigen ist aber kein Hervorrufen und Schaffen des Infinitesimalen, vielmehr ein beschauliches Bergabgehen zu nennen, ein Aufhaspeln der Maschen, die das Infinitesimale unbewußt in uns gewebt hat. „In der Geschichte des mathematischen Denkens war dieser Schritt allerdings nicht der erste. Und so ist es zu verstehen, daß die Logik demselben nicht die fundamentale Stellung gab, die ihm zukommt. Aber ein sehr bedenkliches Symptom ist es, daß seit der Erfindung der Infinitesimal-Rechnung die Charakteristik des mathematischen Denkens nicht unter der leitenden Rücksicht dieser anderen Begriffe und Methoden angestrebt wurde.“ (System S. 104.) Wir würden ohne die Realität des Unendlichkleinen niemals einen Zahlbegriff haben, und wir würden durch die Zahlen allein in ihrer toten Diskontinuität und starren Einheit niemals zum Begriff des Infinitesimalen gelangen. Zu behaupten, daß jeder Differentialquotient erst aus einem endlichen Quotienten abgeleitet werden müsse und nicht anders könne, ist ebenfalls ein verfehlter Einwurf. Daß eine derartig regressiv verfahrende Methode bei den meisten Aufgaben angewendet wird, liegt lediglich an dem Zweck, der jedesmal verfolgt wird. Wer hindert uns, einen bestimmten Differentialquotienten aufzustellen und aus ihm durch Integration (jene Methode, die tatsächlich von vornherein aus dem Unendlichkleinen abgeleitet wird und deshalb von Cohen mit Recht als die ursprünglichere vor der Differentialrechnung proklamiert wird) und hieraus die betreffende Funktion oder Kurve zu extrahieren. Diese hier entstehende Funktion ist natürlich eine vorher nicht zu bestimmende, allein durch das Differential gekennzeichnete. Nun aber liegt es in der Natur der meisten

[6]) Cohen, Prinzip d. Inf.-Meth., S. 22 und 23.

Probleme, umgekehrt aus einer in ihrer Endlichkeit gegebenen Funktion ihren Verlauf im Unendlichkleinen zu finden. Ist es dann nicht durch die Anlage bedingt, dieses bestimmte infinitesimale Verhältnis an der Schnur der Endlichkeit zu verfolgen?

Der letzte Sprung von dem Quotienten der Endlichkeit auf den Differentialquotienten ist der ausschlaggebende: dieser wäre niemals ohne den in uns gegründeten Begriff des Infinitesimalen möglich.

§ 1.

Eines besonders gründlichen Ausbaues bedarf unseres Erachtens die Theorie der Irrationalzahl, die von Cohen merkwürdigerweise in ihrer Bedeutung als Anwalt seines Grundgedankens nicht erkannt worden ist. Anstatt diese vorzügliche Aufstellung der Einheit in Mehrheit konsequent durchzuführen, gibt er sie am ersten entscheidenden Punkte auf. Weil die Einheiten scheinbar in der Irrationalzahl ausbleiben, muß die Mehrheit gesprengt sein! Träte dieser Fall der Sprengung tatsächlich ein, so wäre die ganze Theorie in Frage gestellt, denn es gehört zur Vollkommenheit einer solchen, daß sie einen Vorgang nach Prinzipien erklärt, die sich in Hinsicht auf ihn ein für allemal gebildet haben. Die stete Modifizierung der Theorie bei irgend einer Änderung des zu erklärenden Vorganges macht ihre Gültigkeit verdächtig.

Wir hatten schon gezeigt, wie Cohen bei der Irrationalität die Allheit an die Stelle der Mehrheit setzt. Dieser Unstetigkeitspunkt in der Theorie, der nur für besagte Zahlen gelten soll, um gleich beim nächsten kontinuierlich folgenden Bruch wieder in die Bahn der früheren Anschauung zurückzutreiben, läßt schlechterdings unbefriedigt. Daß Cohen selbst diese Empfindung gehabt hat, scheint aus der Unsicherheit in der Präzisierung gewisser Begriffe hervorzugehen, indem die Einheiten das eine Mal ganz ausbleiben müssen, dann wieder nur nicht erschöpfen können. Daß diese Verwechselung eine bewußte war, will uns beinahe sicher scheinen: das Nichterschöpfenkönnen würde immerhin eine Mehrheit fordern, das Ausbleibenmüssen hat sich zugunsten der Allheitsnotbrücke hineingestohlen.

§ 2.

Um dieser Frage nach dem eigentlichen Wesen des Irrationellen und seiner Erklärung vermittelst der Cohenschen Zahlauffassung näher treten zu können, ist es notwendig, in einem Seitensprung zur Mathematik die Art und Güte der zu diesem Kapitel vorliegenden Theorien zu beleuchten.

Man ist sich über die eigentliche Natur der Irrationalzahlen noch nicht völlig klar geworden. So sagt Pasch[7]): „Obwohl wir für die Einführung der irrationalen Zahlen Darstellungen besitzen, welche zu einem in sich folgerichtigen Aufbau der Analysis dienen, so erscheint das Bedürfnis nach Klarstellung jenes Gegenstandes immer noch nicht in jeder Hinsicht befriedigt."

Weierstraß, Kronecker, Dedekind, Kantor, Méray u. a. haben versucht, Definitionen für diese eigentümlichen Zahl-Bastarde zu geben. Mag man nun aber das Irrationelle durch eine konvergente Funktion $\varphi(n)$ bestimmen wollen, die bei $\lim. n = +\infty$ keinen rationalen Grenzwert besitzt, mag man es als die Grenze zweier gegeneinander konvergierender Reihen betrachten etc., zu einer strengen Begründung des Irrationalbegriffes gelangt man nicht.

Alle diese Definitionen kranken unserer Ansicht in der Hauptsache daran, daß sie zur Gründung eines elementaren Zahldinges des Grenzbegriffes benötigen; das Irrationelle wäre also erst mit Hilfe eines Verfahrens zu erklären, welches selbst die Grundlegung fordert. Somit trifft auch Cohen der Vorwurf der Inkonsequenz an dieser Stelle, wenn er zugunsten der Auffassung der Irrationalzahl als nicht periodischen, unendlichen, systematischen Bruches eine tiefgehende Umgestaltung seiner Theorie vornimmt. Da nämlich die Überschreitung des Endlichen bei der Plus-Erzeugung nur mit Hilfe der Grenzmethode möglich ist, so sind wir gar nicht berechtigt, die in starrer Isoliertheit der Mehrheit gegenüberstehende Allheit heraufzubeschwören. (Wir kommen auf diesen Punkt noch einmal zurück.)

---

[7]) Mathem. Ann., Bd. XL, S. 149.

In sehr geistreicher und origineller Weise hat Dedekind[8]) das vorliegende Problem durch Schnitte in einer Menge R zu lösen gesucht, indem er dieses R durch einen rationalen Schnitt in zwei Klassen zerfallen ließ, die sich insofern unterschieden, als jedes Element der ersten Klasse kleiner als das der zweiten war, während außerdem in der ersten ein größtes wie in der zweiten Klasse ein kleinstes rationales Element, jenes nämlich, welches den Schnitt erzeugt, existiert. Sodann weist er nach, daß die letztere Eigenschaft bei Teilung der kontinuierlichen Menge durch einen irrationalen Schnitt wegfällt.

Auch die Heinesche Begriffsgründung[9]) des neuen Zahldinges, die unter Umgehung der Grenzmethode ein rein formelles Zahlsymbol $\left(\begin{smallmatrix} a_i \\ b_i \end{smallmatrix}\right)$ aufstellt und dasselbe als den Ausdruck der bestimmten Forderung der kontinuierlichen Annäherung zweier Brüche ganz unabhängig von ihrer schließlichen Kontingenz macht, ist hier zu erwähnen. Beide Auffassungen sind trotz ihres Bestrebens nach Unabhängigkeit in der Formulierung oder vielleicht gerade hierdurch zweifelhaft und ungenau. Die definierte Zahl nämlich könnte ebensogut als eine Gruppe unendlich vieler, dicht nebeneinander gelagerter Zahlen aufgefaßt werden, die bei allen Operationen die Fühlung gegeneinander bewahren. Diese Gruppen schmelzen bei allgemeiner Anwendung dieser Theorie im rationalen Falle zu einem Werte zusammen.

In beiden Theorien wird von der Kontinuität, deren Inhalt die irrationalen und transzendenten Zahlen ausmachen, eine Eigenschaft vorweg genommen, deren Existenz noch gar nicht feststeht.

Infolgedessen steht auch das D. Gesetz IV, S. 18, auf sehr unsicheren Füßen. Völlig unmotiviert ist zudem die Annahme,

[8]) Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1905. Unter Schnitt versteht D. eine Einteilung von R in zwei Klassen, derart, daß jedes Element in der einen größer ist wie irgend eins in der andern Klasse.

[9]) E. Heine, Die Elemente der Funktionenlehre, Journal f. r. u. ang. M., Bd. 74; vergl. auch Paul Bachmann, Vorl. über d. Natur d. Irrationalzahlen, Leipzig 1892.

daß zwischen jeder Zahl α und einer anderen β immer unendlich viele rationale Zahlen c liegen müssen. S. 18, Stetigkeit usw.

§ 3.

„Die Mehrheit hatte Unbestimmtheit; darin gerade bestand ihr selbständiger Wert.“ (System S. 153.)

Also ist das Irrationelle mit seiner Allheit die Mauer, an der sich die antizipierende Vernunft den Schädel einrennt, der Sumpf, in dem wir rettungslos stecken bleiben, wenn der Sprung vom Ufer des Rationalen zum jenseitigen zu kurz geriet?

Ist denn die Reihe das Wesen der Irrationalzahl; ist nicht vielmehr jede Mehrheitszahl auf solche Weise darzustellen? Also entspringt jede Zahl dem Urteil der Allheit; der Mehrheit wird der Dienst gekündigt, die Einheit läuft hinterdrein. Und nun sind wir so klug als wie zuvor; scheidend ließ uns der Lebensfunke der Einheit bei leeren Gefäßen zurück! Das Urteil der Allheit betätige sich unbeanstandet in der unendlichen Zusammenfassung der Reihe, wir wollen ihr auch nicht die Fähigkeit absprechen, das Irrationale zu bilden; wir erweitern geradezu ihre Befugnis über das ganze Zahlgebiet, aber wir sprechen ihr grundsätzlich die erschöpfende und gründende Kraft ab; in diesem Urteil wird die Zahl gleichsam durch ein farbiges Glas betrachtet; sie ist das Scheidewasser der Einheit und Mehrheit, indem sie die Mehrheit verschlingt und die Einheit herauskristallisiert, allerdings als Einheit der Allheit. Ihre positive Wirkungssphäre liegt in der Schaffung des Innengehaltes, in der Hinleitung zum Raume.

Wir wollen uns also nicht beirren lassen und zunächst feststellen, daß eine gewisse Anzahl von Einheiten, wenn auch mit einem wohl zu merkenden Rest[10]), in dieses neue Ding eingebettet werden können. Diese Einheiten können endlich und doch so beschaffen gedacht werden, daß wir auf diese Weise die Bruchzahl signifizieren, die um ein Infinitesimales von der zu definie-

[10]) Das Streben nach Deutlichkeit wird dieses rückwärtsschreitende Verfahren entschuldigen.

Es war bereits früher erwähnt, daß dieses eigentümliche Gebilde $dy = F \cdot dx$ welches nun doch einmal vorhanden ist, von Cohens System vollkommen übergangen wird; es ist weder die absolute Einheit, da es

renden Irrationalzahl differiert; dieses Unendlichkleine ist aber die absolute Einheit ohne Mehrheit. Somit könnten wir ungefähr die Irrationalzahl definieren als die nächst niedere Mehrheitszahl, der eine endliche Summe infinitesimaler Größen additiv beigefügt ist.

Hierdurch bietet sich die Möglichkeit, die Hilfe des Allheits-Urteils entbehren zu können, denn die unendliche Reihe, die wir zur Lösung des Irrationalen aufgestellt haben, stellt lediglich eine rechnerische Methode dar.

Überhaupt wird sich der Verstand stets schwer dazu entschließen, ein derartiges Zahlgebilde, wie wir es in den unendlichen Reihen besitzen, Zahl im eigentlichen Sinne zu nennen. Die Reihe ist nicht die zu findende Zahl, „zwischen beiden Seiten besteht gar keine Verwandtschaft", vielmehr könnten wir die unendlichen Dezimalzahlen als ziffernmäßiges Schema für ein in infinitum zu vollziehendes Verfahren ansehen.

Die Reihe zur Bestimmung der Zahl benötigen wir jetzt nicht mehr, da wir bei Gründung des kontinuierlichen Zahlensystems den vorhergehenden Bruch durch endliche Einheiten erzeugt hatten. Es ist einleuchtend, daß jede Mehrheitszahl, deren Erzeugendes um ein Infinitesimales anwächst, eine Irrationalzahl sein muß. Denn da die erstere aus gleichen endlichen Einheiten besteht, so müßte das hinzutretende Infinitesimale gleichmäßig auf alle diese Einheiten verteilt werden, was bei ihrem Mangel an jeglicher Mehrheit ausgeschlossen ist.

Wir kommen hierdurch zu folgendem Satz:

Rationale Zahlen, die sich um ein Infinitesimales oder ein endliches Vielfaches hiervon in der kontinuierlichen Zahlenreihe fortbewegen, werden zu Irrationalzahlen oder: Das Irrationale ist der embryonale Zahlzustand, den die Kontinuität der Realität des Denkens, der unterbrochene Prozeß, den die Mehrheit bei der Plus-Antizipation zu durchlaufen hat. Die Zauberformel, die den Geist des Irrationalen enträtselt, können wir direkt Cohens Worten entnehmen. Ihr

eine Mehrheit von dx enthält, noch eine Mehrheitszahl im eigentlichen Sinne. Es ist eben Sache des reinen Denkens, in seiner genialen Unbekümmertheit und Subjektivität auch dieses F . dx der antizipierenden Tätigkeit der Zeit zu unterwerfen.

erster Teil ist: „das Unendlichkleine als der Ursprung der Zahl, der als solcher nicht die Zahl selbst ist“ S. 140, seine notwendige Ergänzung:

„Die Kontinuität der infinitesimalen Elemente“, die „den stetigen Zusammenhang“ bedeutet (S. 115).

Das unendlich fortgesetzte Verfahren verläuft im Intervall zweier, noch durch Unstetigkeit voneinander geschiedener rationaler Zahlen, während es bisher das rettende Ufer durch den Ozean des Infinitesimalen erreicht hatte. Die hinzutretende endliche Mehrheit absoluter Einheiten reicht nicht aus, die nächste rationale Zahl gründen zu können. Somit ist das Irrationale etwas Unfertiges, etwas Sichnochzuerfüllendes; es verdient mehr der Stumpf einer Zahl als selbst eine solche genannt zu werden. In dem Irrationalen zieht die Kategorie den Schleier der Mehrheit um ein weniges zurück und läßt uns ihren ganzen Ursprung in seiner ganzen Nacktheit erblicken.

Die infinitesimale Mehrheit ist das Irrationale *κατ' ἐξοχήν*, es geht dem Rationalen voraus und ist das Symbol für die endliche Anzahl absoluter Einheiten, die als solche noch keine eigentlichen Zahlen sind.

Im Widerspruch mit dem Dedekindschen Resultate finden wir mithin, daß die Unstetigkeiten, die das Rationale noch aufzeigt, nicht etwa durch eine vielmehr durch unendlich viele irrationale oder transzendente Zahlen stetig ausgefüllt werden.

Grenze und Reihe sind ungenügend, um ein neues Zahlding gründen zu können; allen hierauf basierenden Versuchen können wir zurufen: definitio ne sit negans! Die unendliche Reihe ist ein erhabenes Trostmittel, das der Vernunft gegeben wurde, um sie durch fortwährende Beschäftigung nicht zu der trostlosen Erkenntnis der Unerreichbarkeit des Zieles kommen zu lassen.

Aber die Stärke des Trostes, die in der Täuschung beruht, hat im strengen mathematischen Denken eine Schwäche zur Folge, indem nun die Vernunft sich vorstellen zu müssen glaubte, ein derart angenähertes Verfahren würde zum Schluß hart am Diesseits des Rationalen eine bestimmte Zahlgröße zur Wirklichkeit herausheben. Dies aber gerade ist der Unterschied zwischen periodischer und irrationaler Zahl. Im ersten Fall hatte das Näherungsverfahren von beiden Seiten aus eine

gemeinsame rationale Grenze; das nicht periodische Verfahren überschreitet das Gebiet des Rationalen an zwei verschiedenen durch Unstetigkeit voneinander getrennten rationalen Punkten. Man glaube nicht etwa, daß wir der irrationalen Dezimalzahl ihren präzisen Wert rauben wollen, die Fangarme ihrer Näherung umklammern auch hier das gesuchte Element, jedoch erst im Gebiet des Irrationalen selbst.

Diese Auffassung des Irrationalen steht gewiß im Gegensatz zur Natur rationaler Mehrheitszahlen; indessen wird der Ursprung gewahrt, und das ist die Hauptsache; „der Ursprung ist nicht nur der notwendige Anfang des Denkens; sondern in allem Fortgang muß er sich als das treibende Prinzip betätigen“ [11]). Aber auch die Eigentümlichkeit der Mehrheitszahlen bleibt anwendbar, sobald wir annehmen, daß jedesmal die betreffende endliche Einheit, welche die antizipierende Kategorie der Zeit heranholt, zuvörderst aus ihrem Ursprunge entwickelt werden muß. Beim Irrationalen kann die Zeit diesen Entstehungsprozeß nicht abwarten; sie greift zu und muß nun mit diesem Krüppel fertig zu werden suchen.

Es entsteht nunmehr die Frage: Wie läßt sich die eigentümliche Struktur der irrationalen Dezimalzahl aus einer solchen Definition erklären?

Die Anzahl der infinitesimalen Einheiten, die noch nicht die Fähigkeit erlangt hat, zu dem geschlossenen Ganzen einer endlichen Einheit zusammenzuwachsen, heben wir zunächst heraus und schweißen sie mit der hier in Betracht kommenden endlichen Einheit oder einem Bruchteil von ihr zu einer neuen zusammen. Hierzu sind wir berechtigt, denn es besteht keine Forderung, wonach eine und nur eine Summe infinitesimaler Teilchen höhere Gruppen bilden dürfte. So wird erreicht, daß der irrationale Punkt zu einem rationalen der neuen Einheit geworden ist; indessen ist der rationale Punkt des hinzukommenden Bruchteils ein solcher geblieben. Wenn also der Bruchteil zweckmäßig gewählt ist, so ist leicht einzusehen, daß schließlich auch der rationale Anfangspunkt, mit dem die erste Einheit begann, ebenfalls ein rationaler Punkt der zweiten gemäß sein wird; dies geschieht, sobald bei entsprechender Wahl des Bruchteiles die

[11]) System S. 33.

zu diesem jedesmal hinzutretenden endlichen Infinitesimalen bei ihrer unendlich wiederholten Setzung in einer die Strecke erschöpfenden Reihe wiederum einen rationalen Bruchteil dieser neuen Einheit geben. So wird erreicht, daß die vorher irrationale Strecke zu einer rationalen bezüglich der zweiten Einheit umgeschaffen wird. Eine solche kann nun durch eine periodische Dezimalzahl dargestellt werden[12]). In Betracht kommt aber allein die zuerst gewählte Einheit; hinsichtlich dieser muß demnach jeder einzelne Dezimalbruch der eben erhaltenen Zahl in einen Bruchteil und die stets gleiche Summe infinitesimaler Einheiten zerlegt werden. Dieses Verfahren würde nun bei dem jedesmal gleichen Abzug wiederum das Bild einer periodischen Dezimalzahl schaffen, wenn nicht der dem Stellenwert nach ins Unendliche gerückte Überschuß in seiner ebenfalls ins Unendliche wachsenden Anhäufung schließlich wieder das Endliche beeinflussen und die Periode zerstören würde. Die Vollendung der Periodenvernichtung ist die Erschaffung der irrationalen Dezimalzahl. Durch die Möglichkeit, das Irrationale unter anderen Verhältnissen zu einem Rationalen umschaffen zu können, sind wir in der Lage, es ohne jeden umständlichen Nachweis als Zahl charakterisieren und seine Befähigung, sich allen Operationen zu unterziehen, mit Sicherheit annehmen zu können.

Wenn auch Cohen gerade an der wichtigsten Stelle einer althergebrachten Auffassungsweise eine Konzession macht, so bleibt seiner Philosophie der Mathematik dennoch das unbestreitbare Verdienst, durch Zugrundlegung des Infinitesimalen auf die fast ausschließliche Bedeutung der Mathematik als Methode der Naturwissenschaft hingewiesen zu haben; wir können in seinem System die Grundlagen zu einer Zahlentheorie wahrnehmen, welche die Erkenntnis der innersten Struktur der Zahlgebilde zu schaffen berufen ist.

---

[12]) Das Verfahren ist kurz als Dehnung der kontinuierlichen Zahlenreihe um die infinitesimalen Einheiten $\mu\, d\eta$ zu charakterisieren; die Dehnung betrifft die Unstetigkeitsintervalle. Bezeichnen wir das Irrationale mit $A + \mu\, d\eta$, so ist $A + \mu\, d\eta = P.E$, wo P einen rationalen Bruch, E die neue Einheit bedeutet. Treffender drückt dies die Gleichung aus:

$$\sum_{0}^{A} \Delta_x + \mu\, d\eta = \sum_{0}^{P} \Delta_y$$

Hier ist Δ_x das erste, Δ_y das neue Unstetigkeitsintervall.

Literaturverzeichnis.

I. Überweg-Heinze, Geschichte der Philosophie. 9. Aufl.
II. Windelband, Lehrbuch der Geschichte der Philosophie. 2. Aufl.
III. Windelband, Geschichte der neueren Philosophie. 2. Aufl.
IV. R. Falckenberg, Geschichte der neueren Philosophie etc. 5. Aufl. Leipzig 1905.
V. Kant-Studien. Jahrg. 1903. Bd. VIII.
VI. Kant-Studien. Jahrg. 1904.
VII. Berner-Studien zur Philosophie und ihrer Geschichte. Bd. XXI. Bern 1900.
VIII. M. Scheler, Die transzendentale und psychologische Methode. Leipzig 1900.
IX. Lange, Geschichte des Materialismus. 5. Aufl. Leipzig 1896.
X. H. Cohen, Kants Theorie der Erfahrung. 2. Aufl. Berlin 1885.
XI. H. Cohen, Platons Ideenlehre und die Mathematik. Marburg 1879.
XII. H. Cohen, Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. Berlin 1883.
XIII. H. Cohen, System der Philosophie. I. Teil: Logik der reinen Erkenntnis. Berlin 1902.
XIV. Martin Altenburg, Die Methode der Hypothesis bei Platon, Aristoteles und Proklus. Marburg 1905.
XV. Paul Natorp, Descartes' Erkenntnislehre etc. Marburg 1882.
XVI. Paul Natorp, Einleitung in die Psychologie nach kritischer Methode. Freiburg i. B. 1888.
XVII. Ernst Cassirer, Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen. Marburg 1902.
XVIII. H. Vaihinger, Kommentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft etc. I. Bd. Stuttgart 1881.
XIX. Frommans Klassiker der Philosophie. Bd. VII. Immanuel Kant etc. von Fr. Paulsen. 4. Aufl. Stuttgart 1904.

Außerdem:

XX. H. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlung. Leipzig 1895. III. Bd.
XXI. Mathematische Annalen. Bd. XL.
XXII. Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 74.
XXIII. R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1905.
XXIV. P. Bachmann, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig 1892.

Lebens- und Bildungsgang.

Verfasser, Rudolf Odebrecht, preußischer Staatsangehöriger, evangelischer Konfession, wurde am 9. März 1883 in Berlin geboren als Sohn des Feuerversicherungsbeamten Paul Odebrecht und seiner Gattin Marie geb. Mohr. Nachdem er das Friedrichs-Gymnasium nach ununterbrochenem Besuch Ostern 1902 absolviert hatte, studierte er an der Berliner Universität vom Sommer-Semester 1902 bis zum Winter-Semester 1905/6 ohne Wechsel der Studienstätte Mathematik, Philosophie und Physik.

Während seiner Studienzeit hörte er die Vorlesungen der Herren Professoren:

Dessoir, Döring, Fischer, Foerster, Frobenius, Hensel, Hettner, Heusler, Knoblauch, Landau, Lasson, R. Lehmann, Lehmann-Filhés, Lummer, Marcuse, Martens, Menzer, Paulsen, Pringsheim, Schottky, Schur, H. A. Schwarz, Simmel, Stumpf, Thiele, Warburg.

Ihnen allen spricht er für die mannigfaltige Anregung und Förderung herzlichen Dank aus.